ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА ЗА КРАЙНИТѢ НАРАСТВАНИЯ

отъ Ярославъ Тагамлицки

Теоремата за крайнитѣ нараствания изразява едно отъ най-важнитѣ свойства на производната и, следователно, при обобщаване на понятието „производна" твърде желателно е споменатата теорема да остане въ сила. Ще покажемъ, че въ този смисълъ принципътъ на перманенцията може да бѫде спазенъ въ твърде широкъ масщабъ. И наистина, ние ще установимъ следната теорема:

Каквато и да бѫде функцията $f(x)$, дефинира въ интервала (a, b), винаги може да й се съпостави поне една функция $\varphi(x)$, дефинирана въ сѫщия интервалъ, съ това свойство, че между всѣки две числа α и β (нека, напримѣръ, $\alpha > \beta$) може да се намѣри поне едно число γ така, че

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = \varphi(\gamma).$$

За да докажемъ теоремата, нека си установимъ едно съответствие Ω по следния начинъ:

1) На всѣка ненаредена двойка различни числа (α, β) ще съпоставимъ едно число γ между тѣхъ.

2) На две различни двойки (α, β) и (α_1, β_1) съпоставенитѣ числа γ и γ_1 сѫ различни.

За да се убедимъ въ осѫществимостьта на такова съответствие, нека развиемъ α и β, напримѣръ, въ една десетична дробь (въ интереса на еднозначностьта, периодъ 9 нѣма да пишемъ); ще предполагаме, че α и β иматъ еднакъвъ брой цифри на лѣво отъ десетичната точка, за което, ако е необходимо, ще пишемъ нули. За общность, ще смѣтаме, че първитѣ различни цифри на α и β стоятъ на мѣсто съ номеръ $n+1$:

$$\alpha = a_1 a_2 \cdots a_n \, p \, b_1 b_2 b_3 \cdots,$$
$$\beta = a_1 a_2 \cdots a_n \, q \, c_1 c_2 c_3 \cdots$$

Отъ $\alpha > \beta$ следва, че $p > q$, т. е. p е най-малко 1.

Нека дефинираме γ по следния начинъ:

$$\gamma = a_1 a_2 \cdots a_n (p-1)(c_1+1) \, q \, p \, q \, q \, c_1 c_1 b_1 b_1 c_2 c_2 b_2 b_2 \cdots,$$

което, въ случай, че $c_1 = 9$, трѣбва да се тълкува като

$$\gamma = a_1 a_2 \cdots a_n \, p 0 q p q q 9 9 b_1 b_1 c_2 c_2 b_2 b_2 \cdots$$

Това число γ има въ редицата на цифритѣ си една последна цифра, която е едновременно различна отъ двѣтѣ си съседни цифри, и, следователно, когато γ е дадено, веднага можемъ да възстановимъ α и β. Очевидно, ако се условимъ на числата α, β да съпоставяме така дефинираното γ, ще реализираме едно съответствие съ исканото свойство. Нека означимъ съ G множеството на точкитѣ γ, за които сѫществува двойка числа α и β, на които съответствува γ. Очевидно G не изчерпва цѣлия интервалъ (a, b), понеже, ако си вземемъ едно число между a и b, въ редицата на цифритѣ на което нѣма последна цифра, различна едновременно отъ съседнитѣ си то туй число, сигурно, нѣма да е отъ G.

Сега лесно ще докажемъ изказаната теорема. Въ множеството G ще дефинираме $\varphi(x)$ съ равенството

$$\varphi(\gamma) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta},$$

кѫдето γ е едно число отъ G, а α и β сѫ оная двойка числа, на която съответствува γ. Въ останалитѣ точки на интервала (a, b) ще дефинираме $\varphi(x)$ какъ да е. Очевидно конструираната функция има исканото свойство.

Интересно е да се отбележи, че аналогично обобщение на понятието „неопредѣленъ интегралъ" е невъзможно, т. е. твърдението: „На всѣка функция $f(x)$ дефинирана въ интервала (a, b) може да се съпостави поне една функция $F(x)$, дефинирана въ сѫщия интервалъ тъй, че, каквито и да бѫдатъ различнитѣ числа α и β, между тѣхъ винаги може да се намѣри поне едно число γ съ свойството:

$$\frac{F(\alpha) - F(\beta)}{\alpha - \beta} = f(\gamma)\text{"},$$

е невѣрно. За да се убедимъ въ това, нека вземемъ следния примѣръ: Нека

$$f(x) = 0, \quad \text{когато } 0 \leqq x < 1,$$
$$f(x) = 1, \quad \text{когато } 1 < x \leqq 2;$$

въ такъвъ случай непремѣнно трѣбва (ако допустнемъ, че $F(x)$ е „неопредѣленъ интегралъ")

$$F(1) - F(0) = 0,$$
$$F(2) - F(0) = m, \text{ кѫдето } m \text{ е или нула или две;}$$

отъ тукъ следва, че

$$F(2) - F(1) = m,$$

но тъй като за x между 1 и 2 стойностьта на $f(x)$ е 1, следва че $F(x)$ не е „неопредѣленъ интегралъ".

Накрая ще направя още една забележка: дадено обобщение на понятието производна ще смѣтаме сполучливо, ако принципътъ на перманенцията е спазенъ поне въ следнитѣ две точки:

1) Ако $f(x)$ е една функция, а $\varphi(x)$ нейната „обобщена производна", то всѣки пжть, когато $f'(x)$ сжществува, трѣбва $f'(x) = \varphi(x)$.

2) Теоремата за крайнитѣ нараствания да остава въ сила, което ще рече [поне ако $f(x)$ е непрекжсната въ затворения интервалъ (a, b)]: на две точки α и β отъ (a, b) да съответствува поне една точка γ между тѣхъ тъй, че

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = \varphi(\gamma).$$

Ще покажа, че сжществуватъ функции, за които е невъзможно да се дефинира „сполучливо" понятието производна. Нека, напримѣръ,

$$\begin{aligned} f(x) &= -x \text{ за } -1 \leqq x \leqq 0 \quad \text{и} \\ f(x) &= x \text{ за } 0 \leqq x \leqq 1; \end{aligned}$$

тогава, ако $\varphi(x)$ е „обобщената производна", съгласно първия принципъ трѣбва

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -1 \text{ за } -1 < x < 0, \\ \varphi(x) &= 1 \text{ за } 0 < x < 1; \end{aligned}$$

отъ друга страна

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha},$$

когато α и β иматъ различни знаци, и, следователно, както и да се съгласимъ да дефинираме $\varphi(0)$, винаги можемъ да си веземемъ α и β тъй, че

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$$

да не съвпада съ никое отъ тритѣ числа $-1, +1$ и $\varphi(0)$, т. е. вториятъ принципъ не може да бжде изпълненъ.