ВЪРХУ ЕДНО СВОЙСТВО НА ПОКАЗАТЕЛНАТА ФУНКЦИЯ*

проф. Ярослав Тагамлицки

В една неотдавнашна работа доказахме следната теорема**:

Ако една реална функция $f(x)$, която има производни от произволен ред при $x \geqq a$, удовлетворява неравенствата

(1) $|f^{(n)}(x)| \leqq Ae^{-x}, \ n=0, 1, 2, \ldots,$

тя се свежда до показателна функция и има вида $f(x)=Ce^{-x}$.

Тъй като в даденото доказателство на тази теорема се използуват методите на теорията на аналитичните функции в комплексна област, би било желателно да се намери директен начин, който не апелира към комплексната област. Тук ще дадем такова доказателство.

Доказателство. Нека функцията $f(x)$ удовлетворява неравенствата (1). Чрез интегриране по части получаваме

$$f^{(n-1)}(x)= \frac{(-1)^{k-n}}{(k-n+1)!} \int_x^\infty f^{(k+1)}(t)(t-x)^{k-n+1}dt$$

при $k \geqq n-1$ и k и n – цели положителни числа.

Да разгледаме сега тъждеството

$$e^{-x}f(x)+2e^{-x}f'(x)+e^{-x}f''(x)$$

---

* Превод на статията „Sur une proprièté de la fonction exponentielle", Доклады БАН, 1, 1948, 33–34. Превел Д. Скордев. — *Бел. съст.*

** Я. Тагамлицки. Функции, които удовлетворяват известни неравенства върху реалната ос. Годишник на Соф. университет. Т. XLII, 1945–1946, с. 239.

материя, при условие че занятията се водят три часа седмично (което беше осъществено с изоставащите ученици). Тук няма да се спираме подробно върху метода и преподаването му. Някои сведения са публикувани от Тагамлицки в работите му [41, 43], а подробно изложение на неговия метод е включено в настоящия сборник.

Интересите на Тагамлицки съвсем не се ограничаваха в рамките на онази наука, на която се беше посветил в най голяма степен — математиката. Други научни области — например теоретичната физика, също бяха обект на задълбочено внимание от негова страна. На всички, които са общували с него, са известни сериозните му познания по археология и интересът му към древните езици. В областта на медицината вниманието му беше насочено към изучаване функциите на жлезите с вътрешна секреция. А през последните няколко години той се занимаваше и с учението за тоналностите в музиката. В своята служба на науката Тагамлицки стигаше до самоотверженост, което например проличава от далеч небезопасните опити върху собствения си организъм, извършвани от него преди десетина години във връзка с изследванията му в областта на медицината.

Общият корен на всички научни занимания, на които Тагамлицки посвещаваше свободното си време, беше неутолимата му жажда за знания. А характерни за подхода му бяха дълбоко критичното отношение към съществуващите обяснения на разглежданите факти и търсенето на нови оригинални тълкувания. И може би няма да сбъркаме, ако кажем, че горните две качества бяха определящи в цялата му дейност на учен и педагог.

Цялостната дейност на Тагамлицки получи обществено признание. Освен споменатите дотук изрази на такова признание можем да посочим още двукратното му награждаване с орден „Кирил и Методий" — I степен, и удостояването му със званието „Заслужил деятел на науката". Без риск да сгрешим обаче, можем да кажем, че делото на Тагамлицки не само напълно заслужи, но и надхвърли изразите на това признание. Тагамлицки, който живееше със и за своята наука, не смяташе, че оценката, която един учен получава приживе, има първостепенно значение. Много по-важно според него бе каква следа оставя ученият след себе си чрез своето научно наследство и чрез въздействието, оказано върху неговите приемници. А Ярослав Тагамлицки несъмнено остави в това отношение ярка и трайна следа.

$$|f(x)+2f'(x)+f''(x)| \leqq \frac{2Ae^{-x}}{k+1} + \frac{2|f'(x)|}{k+1}.$$

Тъй като цялото положително число k беше произволно, имаме

$$f(x)+2f'(x)+f''(x)=0$$

и следователно

$$f(x)=Ce^{-x}+C_1xe^{-x}.$$

От друга страна,

$$|Ce^{-x}+C_1xe^{-x}| \leqq Ae^{-x},$$

откъдето следва, че $C_1=0$.

Доказателството, което изложихме, представлява модификация на един метод, който използувахме при изследване на регулярно монотонните редици*.

* Я. Тагамлицки. Върху редиците,които удовлетворяват някои неравенства. Годишник на Соф. университет. Т. XLIII, 1946—1947, с. 193.

$$= \frac{(-1)^k}{(k-1)!(k+1)!} \int_x^\infty e^{-u}(u-x)^{k-1}\,du \int_x^\infty f^{(k+2)}(t)(t-x)^{k+1}dt$$

$$+ \frac{2(-1)^{k-1}}{k!^2} \int_x^\infty e^{-u}(u-x)^k\,du \int_x^\infty f^{(k+2)}(t)(t-x)^k\,dt$$

$$+ \frac{(-1)^{k-2}}{(k+1)!(k-1)!} \int_x^\infty e^{-u}(u-x)^{k+1}du \int_x^\infty f^{(k+2)}(t)(t-x)^{k-1}dt$$

$$= \frac{(-1)^k}{(k-1)!(k+1)!} \int_x^\infty \int_x^\infty e^{-u} f^{(k+2)}(t)(u-x)^{k-1}(t-x)^{k-1}(u-t)^2\,du\,dt$$

$$+(-1)^k \left[\frac{2}{(k+1)!(k-1)!} - \frac{2}{k!^2}\right] \int_x^\infty e^{-u}(u-x)^k\,du \int_x^\infty f^{(k+2)}(t)(t-x)^k\,dt,$$

т. е.

$$e^{-x}[f(x)+2f'(x)+f''(x)] \tag{2}$$

$$= \frac{(-1)^k}{(k-1)!(k+1)!} \int_x^\infty \int_x^\infty e^{-u} f^{(k+2)}(t)(u-x)^{k-1}(t-x)^{k-1}(u-t)^2\,du\,dt$$

$$+ \frac{2e^{-x}f'(x)}{k+1}.$$

Тъй като функцията $f(x)$ удовлетворява неравенствата (1), имаме

$$|e^{-x}[f(x)+2f'(x)+f''(x)]|$$

$$\leqq \frac{A}{(k-1)!(k+1)!} \int_x^\infty \int_x^\infty e^{-u-t}(u-x)^{k-1}(t-x)^{k-1}(u-t)^2\,du\,dt$$

$$+ \frac{2e^{-x}|f'(x)|}{k+1}.$$

В специалния случай, когато $f(x)=e^{-x}$, формулата (2) дава

$$\frac{1}{(k-1)!(k+1)!} \int_x^\infty \int_x^\infty e^{-u-t}(u-x)^{k-1}(t-x)^{k-1}(u-t)^2\,du\,dt - \frac{2e^{-2x}}{k+1} = 0$$

и следователно