

Проф. ЯРОСЛАВ
ТАГАМЛИЦКИ

Диференциално смятане

ШЕСТО ИЗДАНИЕ

ИЗДАТЕЛСТВО НАУКА И ИЗКУСТВО СОФИЯ 1978

ИЗ ПРЕДГОВОРА КЪМ ПЪРВОТО ИЗДАНИЕ

Настоящият курс по диференциално и интегрално смятане е предназначен за студентите по математика и физика от Физико-математическия факултет. Той представлява преработка на курса от 1951 г. за студентите-заочници по математика и физика.

Предметът изисква от читателя известна зрелост, поради което мнозина срещат затруднения при първото си запознаване с тези въпроси. Тези затруднения са естествени и не трябва да смущават никого. При второ четене, когато читателят има общ поглед върху предмета, те сами отпадат в по-голямата част. Когато читателят, след като е добил впечатление например от първите две части на учебника, наново се върне върху преминатото, той ще има съвсем друг поглед върху него.

Курсът трябва да се изучава непременно с молив и хартия. Читателят трябва да извършва писмено пресмятанията, да възпроизвежда доказателствата, като следи къде се използват в тях предположенията, и да решава много задачи.

София, 1. XII. 1953 г.

Я. Тагамлици

ИЗ ПРЕДГОВОРА КЪМ ВТОРОТО ИЗДАНИЕ

При първо четене е целесъобразно читателят да изостави § 5, § 7 и § 8 от глава I на част I.

Особено място в този учебник заемат задачите. Разбира се, най-напред са дадени задачи, които се решават, като се прилагат непосредствено общите методи от основния текст. Чрез тях студентът добива необходимата техническа сръчност. По-нататък обаче следват задачи, които разширяват кръгозора на читателя. Така под форма на задачи читателят се запознава с различни възможности за въвеждане на елементарните функции, с критерия на Кумер, с критерия на Абел, с Чезаровото сумиране на разходящите редове, със съществуването на диференцируем клон на полярния ъгъл на една еднократно гладка крива, с неравенството на Коши — Буняковски, с неравенството на Хьолдер, с неравенството на Минковски, с полиномите на Чебишев и техните свойства, с числата на Бърнули, със сумационната формула на Ойлер — Маклорен, с теорията на функцията $\Gamma(x)$, изложена по метода на Бор, Молеруп и Артин, с Гаусовата квадратурна формула, с възможността да се изгради теорията на вероятностите, без да се въвежда понятието вероятност, с непрекъснатата функция на Вайерщрас, която няма производна, с теоремата на Ермит за трансцендентност на Неперовото число, с теоремата на Вайерщрас за апроксимиране на непрекъснати функции с полиноми, с понятието за неразложимост на една функция в един конус от функции (макар и в специалния случай, когато този конус е множеството на монотонно растящите функции), с интерполационната формула на М. Рис и неравенството на С. Бернщайн, с критерия на Ермаков и пр. Всяка една от тези задачи е или достатъчно подготвена от задачите, които непосредствено я предшествуват, или е снабдена с подходящо упътване, така че интересуваният се студент наистина може да я реши.

София, 1. XII. 1956 г.

Я. Тагамлички

ИЗ ПРЕДГОВОРА КЪМ ТРЕТОТО ИЗДАНИЕ

За разлика от предишните издания настоящото издание **излиза в два тома**. В първия том се разглежда диференциалното смятане, а във втория — интегралното смятане. Промените се отнасят главно до **подробностите** и засягат целия учебник.

София, 1. XII. 1961 г.

Я. Тагамлицки

ПРЕДГОВОР КЪМ ЧЕТВЪРТТО ИЗДАНИЕ

Промените в настоящото издание се отнасят главно до подробностите.

Приятен дълг ми е да изкажа най-сърдечна благодарност на моя дълбоко уважаван колега Д. Скордев, който допринесе много за подобряването на учебника.

София, 30. XI. 1965 г.

Я. Тагамлицки

СЪДЪРЖАНИЕ

Из предговора към първото издание	5
Из предговора към второто издание	6
Из предговора към третото издание	7
Предговор към четвъртото издание	8

Част I

Реални числа, редици от реални числа, редове от реални числа

Глава I. Реални числа	9
§ 1. Равенство между реални числа	9
§ 2. Аритметични действия	9
§ 3. Сравняване на реалните числа	12
§ 4. Абсолютна стойност	14
§ 5. Понятието цяло число и едно негово обобщение	16
§ 6. Принцип за непрекъснатост на множеството на реалните числа	20
§ 7. Съществуване на непрекъснати наредени тела като следствие от съществуването на тялото на рационалните числа (метода на Г. Кантор)	23
§ 8. Съществуване на непрекъснати наредени тела като следствие от съществуването на тялото на рационалните числа (метода на Р. Дедекиннд)	34
§ 9. Геометрична терминология	39
§ 10. Съществуване на най-малък член във всяко ограничено отдолу множество от цели числа	40
§ 11. Принцип на Архимед	40
§ 12. Теорема на Кантор	41
§ 13. Разпределение на рационалните и ирационалните числа	42
Общи задачи	43
Глава II. Безкрайни редици	47
§ 1. Редици	47
§ 2. Околност	47
§ 3. Точка на съгъстяване. Теорема на Болцано — Вайерщрас	48
§ 4. Сходящи редици	50
§ 5. Действия със сходящите редици	54
Задачи	58
§ 6. Някои свойства на сходящите редици	60
Задачи	65
§ 7. Монотонни редици	66
§ 8. Неперово число	68
§ 9. Ограничени редици	70
§ 10. Общо условие за сходимост на редиците (теорема на Коши)	71
§ 11. Несобствени точки	73
§ 12. Най-дясна и най-лява точка на съгъстяване	74
Общи задачи	75

Глава III. Безкрайни редове	91
§ 1. Сходимост на редовете	91
§ 2. Геометрична прогресия	93
§ 3. Общо условие на Коши за сходимост на редовете	94
§ 4. Елементарни свойства на редовете	95
§ 5. Редове с неотрицателни членове	97
§ 6. Признаци (критерии) за сходимост на редове с положителни членове	99
§ 7. Представяне на константата e във вид на безкраен ред	105
§ 8. Теорема на Коши за редове с неотрицателни монотонно намаляващи членове	106
§ 9. Критерий за сходимост на Лайбниц	108
§ 10. Абсолютно сходящи редове	109
§ 11. Комутативен закон при абсолютно сходящите редове	112
§ 12. Умножаване на безкрайните редове. Теорема на Мертенс. Теорема на Коши	115
Общи задачи	118

Част II

Диференциално смятане на функции на една реална променлива

Глава I. Функции на една реална променлива	128
§ 1. Функционална зависимост	128
§ 2. Графика на една функция	130
§ 3. Ограничени функции	132
§ 4. Граници на функции	133
§ 5. Граница на функцията, когато аргументът клони към $+\infty$ или към $-\infty$	136
§ 6. Границата на $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$	137
Задачи	139
§ 7. Непрекъснати функции	140
§ 8. Свойства на непрекъснатите функции	146
§ 9. Равномерна непрекъснатост	154
§ 10. Осцилация на една функция	157
§ 11. Още една форма на дефиницията на понятието непрекъснатост	158
Задачи	160
§ 12. Производна на функция	161
§ 13. Механично значение на производната	168
§ 14. Елементарни свойства на производните	169
§ 15. Производни на елементарни функции	173
§ 16. Диференциал	177
§ 17. Последователни производни	179
§ 18. Формула на Лайбниц	181
§ 19. Теорема на Рол	183
§ 20. Теорема за крайните нараствания	185
§ 21. Обобщение на теоремата за крайните нараствания (теорема на Коши)	187
§ 22. Основна теорема на интегралното смятане	189
§ 23. Полиноми	190
§ 24. Интерполация	192
Задачи	194
§ 25. Монотонни функции	198

Глава II. Развиване на функциите в редове	200
§ 1. Степенни редове	201
§ 2. Диференциране на степенни редове	203
§ 3. Редици от функции	206
§ 4. Редове, членовете на които са функции	208
§ 5. Редици от непрекъснати функции	209
§ 6. Диференциране на безкрайни редици от функции	211
§ 7. Формула на Тейлор за полиноми	213
§ 8. Обща формула на Тейлор	214
§ 9. Отношение на два остатъчни члена	216
§ 10. Тейлоров ред	218
§ 11. Развитие на тригонометрични функции в степенни редове	219
Глава III. Елементарни трансцендентни функции	222
§ 1. Дефиниция на показателната функция	222
§ 2. Ирационалност на числото e	228
Задачи	229
§ 3. Аналитична дефиниция на тригонометричните функции	230
§ 4. Дефиниция на числото π и периодичност на тригонометричните функции	233
Задачи	235
§ 5. Хиперболични функции	236
§ 6. Логаритмична функция	239
Задачи	242
§ 7. Развиване на логаритмичната функция в степенен ред	244
§ 8. Дефиниция на степен, показателят на която не е цяло число	247
Задачи	249
§ 9. Десетични логаритми и тяхната връзка с неперовите логаритми	250
§ 10. Функцията x^n , когато показателят n не е цяло число	251
§ 11. Нютонов бином	151
§ 12. Сравняване растежа на функциите a^x , x^n и $\ln x$	255
§ 13. Обратни функции	256
Задачи	260
§ 14. Обратни функции на непрекъснати функции	260
§ 15. Диференциране на обратните функции	261
§ 16. Обратни кръгови функции	262
§ 17. Пресмятане на числото π	267
Задачи	270
§ 18. Таблица на формулите, върху които се основава техниката на диференцирането	276
Задачи	277
Глава IV. Най-прости приложения на диференциалното смятане	280
§ 1. Максимум и минимум	280
§ 2. Необходимо условие за съществуване на локален екстремум при диференцируеми функции	281
§ 3. Достатъчни условия, за съществуване на локален екстремум	283
Задачи	286
§ 4. Изпъкнали функции	287
Задачи	288
§ 5. Изследване на квадратичната форма $ax^2 + 2bxy + cy^2$	289
Задачи	293
§ 6. Теорема на Лопитал	295
Задачи	300
§ 7. Безкрайно малко	301
Общи задачи	302

Ч а с т ІІІ

Диференциално смятане на функции на няколко независими променливи

Глава I. Функции на няколко независими променливи	325
§ 1. Основни понятия	325
§ 2. Теорема на Болцано — Вайерштрас	329
§ 3. Функции на няколко независими променливи	331
§ 4. Непрекъснатост	332
§ 5. Свойства на непрекъснатите функции	334
§ 6. Равномерна непрекъснатост	335
§ 7. Частни производни на функции, зависещи от няколко независими променливи	336
§ 8. Диференциране на съставни функции	338
Задачи	341
§ 9. Хомогенни функции	343
Задачи	345
§ 10. Тотален диференциал	345
Задачи	348
§ 11. Частни производни от по-висок ред	348
Задачи	354
§ 12. Производни от по-висок ред на съставни функции	354
Задачи	356
§ 13. Тотални диференциали от по-висок ред	357
Задачи	358
§ 14. Тейлоров ред при функции на няколко независими променливи	359
§ 15. Максимум и минимум при функции на две независими променливи	360
Задачи	368
Глава II. Неявни функции	370
§ 1. Основни понятия	370
§ 2. Диференциране на неявни функции, които зависят от един аргумент	372
Задачи	376
§ 3. Диференциране на неявни функции, които зависят от няколко аргумента	381
Задачи	381
§ 4. Диференциране на неявни функции, определени чрез системи	384
Задачи	385
§ 5. Теорема за съществуване на неявни функции	386
§ 6. Обобщение на теоремата за съществуване на неявни функции	393
§ 7. Достатъчни условия за съществуване на производни на неявни функции	398
§ 8. Множители на Лагранж	401
Глава III. Смяна на променливите	405
§ 1. Смяна на независимата променлива при функции на един аргумент	405
§ 2. Обща задача за смяна на променливите при функции на един аргумент	409
§ 3. Смяна на независимите променливи при функции на няколко аргумента	413
§ 4. Обща задача за смяна на променливите при функции на няколко аргумента	416
§ 5. Достатъчни условия, при които може да се извърши смяна на променливите	417
Общи задачи	422

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ

VI издание

Ярослав Александров Тагамлици

Художествен редактор
Светлозар Писаров
Технически редактор
Надежда Минчева
Коректор
Биляна Василева

Дадена за набор на 6. X. 1977 г. Подписана за печат на 16. III. 1978 г. Излязла от
печат на 31. III. 1978 г. Литературна група I-4 Формат 60/90/16 Печатни коли 27,25
Издателски коли 27,25 Тираж 8076 Издателски №23724 Цена 1,65 лв.

9534671511
КОД 02 4790-95-78

ДИ „Наука и изкуство“
ДП „Г. Димитров“