MATHEMATICAL STRUCTURES — COMPUTATIONAL MATHEMATICS — MATHEMATICAL MODELLING
Papers dedicated to Professor L. Iliev's 60th Anniversary
Sofia, 1975, p. 471-477

SUR LE PRINCIPE DU MAXIMUM

Y. Tagamlitzki

Dédié au Professeur L. Iliev à l'occasion de son soixantième anniversaire

Résumé. Le principe du maximum ordinaire n'étant pas applicable aux fonctions convexes à valeurs infinies, on établit à l'aide de l'induction topologique une généralisation, qui est applicable dans le cas de fonctions convexes semi-continues supérieurement à valeurs finies ou $+\infty$.

1. Introduction. Soit F un ensemble de fonctions f à valeurs réelles finies ou $+\infty$ semi-continues supérieurement dans un espace topologique E, tel que tout système filtrant décroissant admette, dans F, une borne inférieure. Lorsque S est un sous-ensemble de E et a est un point de E, on dit que le couple (a, S) vérifie la condition du maximum ordinaire relatif à F lorsque

(A) l'inégalité

$$f(x)<l$$

valable sur S entraîne

$$f(a)<l, \tag{1.1}$$

et (B) si on a

$$f(x)\leq f(a) \tag{1.2}$$

pour tout x de S, alors f est constante sur S.

Exemple. Soit E un espace linéaire topologique et F un ensemble de fonctions convexes semi-continues supérieurement à valeurs finies. Soit $S=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ un ensemble finie de points de E et

$$a=\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\, b_\nu,\quad p_\nu>0,\quad \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu=1.$$

Alors le couple (a, S) vérifie la condition du maximum ordinaire. En effet, on a

$$f(a)\leq\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu f(b_\nu)$$

et la vérification de (1.1) est immédiate. Pour vérifier (1.2) on remarquera que les valeurs de f sont par hypothèse finies et par conséquent l'inégalité

$$f(b_\nu) \leq f(a)$$

ne subsiste pour $\nu = 1, \ldots, n$ que si $f(b_\nu)$ ne dépend pas de ν. Dans cet exemple la condition du maximum ordinaire sera en défaut, si les valeurs des fonctions considérées ne sont pas nécessairement finies. D'autre part on aboutit parfois à fonctions convexes à valeurs infinies. Considérons par exemple la fonction caractéristique φ d'un ensemble A dans l'espace E linéaire considéré. Pour que l'ensemble A soit convexe il faut et il suffit que la fonction $f = -\ln \varphi$ soit convexe. Lorsque A est ouvert, la fonction f est même semi-continue supérieurement, or ses valeurs ne sont pas finies. La généralisation de la condition du maximum qui suit sera applicable dans le cas de fonctions convexes à valeurs finies ou $+\infty$.

2. Généralisation de la condition du maximum. Sous les notations de l'introduction on dira que le couple (a, S) vérifie la condition du maximum généralisé relatif à F lorsque

(I) l'inégalité

$$f(x) < l \tag{2.1}$$

sur S entraîne

$$f(a) < l$$

et

(II) si on a

$$f(x) \leq f(a) \tag{2.2}$$

pour tout x de S et si f n'est pas constante sur S, alors il existe une telle fonction g de F, que

$$g(x) \leq f(x) \tag{2.3}$$

pour tout x de E,

$$g(a) < f(a) \tag{2.4}$$

et

$$g(t_0) = f(a) \tag{2.5}$$

pour certain t_0 de S.

Si le couple (a, S) vérifie la condition du maximum ordinaire, alors il vérifie de même la condition généralisée. En effet, dans ce cas il n'existe pas de fonction vérifiant (2.2) qui ne soit pas constante.

Notons

$$\gamma = (f, \alpha)$$

où $f \in F$ et α est un nombre fini ou $+\infty$ et posons

$$(f, \alpha) < (g, \beta) \Leftrightarrow (f(x) \geq g(x),\ \alpha \leq \beta).$$

Pour rendre à E la structure d'espace inductif on définit la séparatrice φ par

$$\varphi(\gamma)=\{x: x \in E, f(x)<\alpha\}.$$

Proposition. *Si le couple (a, S) vérifie la condition du maximum généralisé, alors a est point caractéristique de S.*

Démonstration. On tire immédiatement de (2.1) que $S\subset\varphi(\gamma)$ entraîne $a \in \varphi(\gamma)$. Puis considérons un tel

$$\gamma_0=(f_0, l_0)$$

qu'on ait

(2.6) $$S\cap\varphi(\gamma_0)\neq 0, \quad S\cap\overline{\varphi(\gamma_0)}\neq 0.$$

On cherche γ_1 de telle façon, que

$$\gamma_0<\gamma_1, \quad \varphi(\gamma_1)\ni a,$$

mais

$$S\cap\overline{\varphi(\gamma_1)}\neq 0.$$

Si $a \in \varphi(\gamma_0)$ on pose $\gamma_1=\gamma_0$.

Considérons le cas $a \overline{\in} \varphi(\gamma_0)$, c'est-à-dire

(2.7) $$l_0\leqq f_0(a)$$

S'il existe un point p de S, pour lequel on a

$$f_0(a)<f_0(p),$$

on pose

$$\gamma_1=(f_0, f_0(p)).$$

Alors il ne reste qu'à considérer le cas dans lequel l'inégalité

(2.8) $$f_0(x)\leqq f_0(a)$$

est valable pour tout x de S.

D'autre par on a (2.6) et à ce titre on a $f_0(x_1)<l$ pour certain point x_1 de S et

$$f_0(x_2)\geqq l$$

pour certain point x_2 de S. Alors f n'est pas constante sur S et par conséquent il existe une fonction g de F vérifiant (2.3), (2.4) et (2.5). Dans ce cas on pose

$$\gamma_1=(g, f_0(a)).$$

Les conditions (2.3) et (2.7) nous donnent $\gamma_0<\gamma_1$. La condition (2.4), nous donne

$$g(a)<f_0(a)$$

et par conséquent $a \in \varphi(\gamma_1)$. D'autre part d'après (2.5) il existe un point t_0 de S pour lequel on a

$$g(t_0) = f_0(a)$$

c'est-à-dire

$$\overline{\varphi(\gamma_1)} \cap S \neq 0.$$

La proposition est donc démontrée.

3. Le principe du maximum généralisé et l'induction topologique. Soit M un sous-ensemble de E. Un point p de M sera dit irréductible relatif à F lorsque, pour tout couple (p, S), $S \subset M$ vérifiant la condition du maximum généralisé, les fonctions de F sont constantes sur $S \cup \{p\}$.

On désignera par $I(M)$ l'ensemble de points irréductibles.

Théorème (*Principe du maximum généralisé*). *Si le sous-ensemble M de E est compact, toute fonction f de F atteint son maximum sur l'ensemble des points irréductibles de M.*

Démonstration. Comme E est muni de la structure d'espace inductif, nous pouvons appliquer l'induction topologique. Les points irréductibles relatifs à F sont précisément les points irréductibles au sens de l'induction topologique relatif à la séparatrice φ.

Soit f une fontion de F. La valeur $+\infty$ étant maximale, on n'a qu'à considérer le cas dans lequel les valeurs de f sont finies sur $I(M)$. Ainsi l'ensemble

$$\{x : x \in E, f(x) < +\infty\}$$

contient $I(M)$ et par conséquent il contient M, c'est-à-dire les valeurs de f sont finies sur M. D'autre part la fonction f étant semi-continue supérieurement et l'ensemble M étant compact, f atteint son maximum sur M. Soit $x_0 \in M$ un point pour lequel on a

$$f(x) \leq f(x_0)$$

sur M. Considérons l'ensemble

$$\{x : x \in E, f(x) < f(x_0)\}.$$

D'après l'induction topologique cet ensemble ne peut pas contenir $I(M)$, car il ne contient pas x_0. Par conséquent il existe un point $t_0 \in I(M)$, pour lequel $f(t_0) \geq f(x_0)$ et par conséquent

$$f(x) \leq f(t_0).$$

Le théorème est donc démontré.

Exemple. Soit E un ensemble convexe dans un espace linéaire topologique et F l'ensemble de fonctions convexes semi-continues supérieurement définies dans E à valeurs finies ou $+\infty$. Soit

$$S = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

un ensemble fini de points de E et

$$a=\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu b_\nu, \quad p_\nu>0 \quad \Sigma p_\nu=1.$$

Alors le couple (a, S) vérifie la condition du maximum généralisé. En effet la vérification de (I) est immédiate. Alors on n'a qu'à considérer la condition (II). Soit f une fonction de F vérifiant

$$f(x)\leqq f(a)$$

pour $x\in S$ qui n'est pas constant sur S. Alors elle atteint la valeur $+\infty$ sur S et $f(a)=+\infty$.

Choisissons les nombres s_ν vérifiant

$$0\leqq s_\nu\leqq 1, \quad \nu=1, 2, \ldots, n,$$

de telle façon qu'on ait $s_\nu=0$ lorsque $f(b_\nu)=+\infty$ et $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu s_\nu>0$. C'est évidemment possible la fonction f n'étant pas constante sur S.

En posant

$$r_\nu=1-s_\nu, \quad \lambda=\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu r_\nu$$

$$c=\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu s_\nu b_\nu \Big/ \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu s_\nu$$

on a

$$f(c)<+\infty.$$

Désignons par α le plus petit nombre vérifiant

$$0\leqq\alpha\leqq 1$$

et

$$f(c+\alpha(x-c))=+\infty$$

pour certain x de S. On tire l'existence de ce nombre de la semi-continuité de f, car $\alpha=1$ fournit

$$f(c+\alpha(x-c))=f(x).$$

Désignons par t_0 un point de S pour lequel on a

$$f(c+\alpha(t_0-c))=+\infty.$$

D'autre part on a $\alpha\neq 0$, car $\alpha=0$ fournira

$$f(c+\alpha(x-c))=f(c)\neq+\infty.$$

Remarquons encore que

$$f(c+\alpha\lambda(x-c))<+\infty$$

pour $x \in S$, car $\alpha\lambda<\alpha$.
Enfin posons

$$g(x)=[f(c+\alpha(x-c))-(1-\alpha)f(c)]/\alpha$$

pour $x \in E$. On a évidemment

$$g(x)\leq f(x)$$

$$g(a)=[f(c+\alpha(a-c))-(1-\alpha)f(c)]/\alpha$$

$$\leq\left[\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu r_\nu f(c+\alpha\lambda(b_\nu-c))-(1-\alpha)f(c)\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu r_\nu\right]/\alpha\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu r_\nu<+\infty=f(a)$$

$$g(t_0)=+\infty=f(a)$$

et la démonstration est terminée.

Comme application faisons encore quelques remarques. Soit M un sous-ensemble de E. Un point a de M sera dit extrémal relatif à F au sens de Minkowski, si

$$a=\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu b_\nu,\ b_\nu=0,\ p_\nu>0\ (\nu=1,\ldots,n),\ \sum_{\nu=1}^{n}p_\nu=1$$

entraîne

$$f(a)=f(b_\nu),\quad \nu=1,2,\ldots,n,$$

pour toute fonction f de F.

Théorème. *Si M est un sous-ensemble compact de E et L est un sous-ensemble convexe ouvert de E contenant les points extrémaux de M, alors $L\supset M$.*

Démonstration. Désignons par φ la fonction caractéristique de L et appliquons le principe du maximum généralisé à la fonction convexe semi-continue supérieurement $-\ln\varphi$. (Les valeurs de cette fonction n'étant pas finies, le principe du maximum ordinaire ne suffit pas.)

Remarquons enfin que nous n'avons pas supposé la convexité locale de l'espace linéaire considéré. Alors à cet égard le dernier théorème est plus général que le théorème démontré par J. L. Kelley et d'autant plus que le théorème de M. Krein et D. Milman généralisant le théorème de Minkowski sur les points extrémaux. En effet, dans le cas d'espace linéaire localement convexe séparé tout ensemble convexe fermé est l'intersection d'ouverts convexes.

Enfin remarquons que le principe du maximum de H. Bauer n'est pas applicable dans le cas des fonctions convexes admettant la valeur $+\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Bauer. Minimalstellen von Funktionen und Extremalpunkte. *Arch. Math.* **9**, 1958, 389—393; *Arch. Math.* **11**, 1960, 200—205.
2. J. L. Kelley. Note on a theorem of Krein and Milman. *J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part I*, 3, 1—2 (1951).
3. M. Krein, D. Milman. On the extreme points of regularly convex sets. *Studia math.*, **9**, 1940, 133-138.

Université de Sofia, Faculté de mathématique et mécanique
Sofia Bulgarie

Reçu le 14. 8. 1973