Глобална форма на оператора на Лаплас върху многообразия с постоянен ранг

Я.Тагамлицки

Нека

$$(1)\qquad \begin{aligned} &F_1(x_1,\dots x_p;\,t_1,\dots t_q)=0\\ &-\ -\ -\ -\\ &F_m(x_1,\dots x_p;\,t_1,\dots t_q)=0 \end{aligned}$$

е едно два пъти гладко многообразие с постоянен ранг.

Ако $u=u(x,t)$ е една два пъти гладка функция в някое отворено множество,което съдържа брутната графика на многообразието,то ние ще покажем как може глобално да се представи оператора на Лаплас за всичките обикновени точки.За тази цел ние ще си послужим с тангенциалните частни производни.Ако функцията u е допустима /вж.относно дефинициите Я.Тагамлицки,Обобщени уравнения на Коши-Риман върху многообразия с постоянен ранг /,то нейните частни производни са също допустими и ние можем да образуваме оператора

$$\Delta u = D_{x_1}D_{x_1}u + D_{x_2}D_{x_2}u + \dots + D_{x_p}D_{x_p}u$$

Този оператор във всяка обикновена точка локално съвпада със оператора на Белтрами и поради това ни дава глобално този оператор.

Доказателството се основава върху каноничното локално представяне

$$\begin{aligned} &x_1=f_1(x_{r+1},\dots x_p)\\ &-\ -\ -\ -\\ &x_r=f_r(x_{r+1},\dots x_p)\\ &t_1=g_1(x_{r+1},\dots x_p;\,t_{m-r+1},\dots t_q)\\ &-\ -\ -\\ &t_m=g_m(x_{r+1},\dots x_p;\,t_{m-r+1},\dots t_q) \end{aligned}$$

на многообразието,валидно за обикновените точки.

Ако означим с $(g_{\alpha\beta})$ метричния тензор на многообразието

$$\begin{aligned} &x_1=f_1(x_{r+1},\dots x_p)\\ &-\ -\ -\ -\\ &x_r=f_r(x_{r+1},\dots x_p) \end{aligned}$$

както знаем операторът на Белтрами се дефинира със

$$Bu = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\alpha=n+1}^{p-n} \sum_{\beta=n+1}^{p-n} \frac{\partial\left(\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial \xi^{\alpha}}\right)}{\partial \xi^{\beta}} , \quad \xi^{\alpha} = x_{n+\alpha} \quad \alpha = 1,\dots p-n$$

$$g = |g_{\alpha\beta}|$$

Като използуваме нашите основни формули

$$g_{\lambda\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \xi^{\lambda}} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \xi^{\mu}} + \delta_{\lambda\mu} \qquad \xi^{\alpha} = x_{n+\alpha}, \ \alpha = 1,\dots p-n$$

$$g^{\lambda\mu} = D_{x_{\lambda+n}} x_{\mu+n}$$

$$D_{x_s} x_{\lambda+n} = \frac{\partial f_s}{\partial \xi^1} g^{1\lambda} + \dots + \frac{\partial f_s}{\partial \xi^{p-n}} g^{p-n\,\lambda} \qquad s = 1,\dots n, \ \lambda = 1,\dots p-n$$

получаваме

$$\Delta u = Bu. \qquad \xi^{\alpha} = x_{n+\alpha}, \ \alpha = 1,\dots p-n$$

с което доказателството е завършено.

Лесно се вижда, че Δu може да се представи във вида

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{p} \left(D_{x_{\alpha}} x_{\beta}\right) D_{x_{\alpha}} D_{x_{\beta}} u + \sum_{\alpha=1}^{p} \Delta(x_{\alpha}) D_{x_{\alpha}} u$$

където $\Delta(x_{\alpha})$ се определят от условието векторът $\Delta(x_1), \dots \Delta(x_p)$ да бъде ортогонален на чистото тангенциално многообразие и от уравненията $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \dots = \Delta T_n = 0$. Специално ако u не зависи от параметрите имаме

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{p} \left(D_{x_{\alpha}} x_{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} + \sum_{\alpha=1}^{p} \Delta(x_{\alpha}) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \quad (1)$$

Особено прост случай имаме, когато уравненията не зависят от параметрите ~~.В този случай полагаме~~ и рангът е n. В този случай полагаме

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial x_{\nu}}$$

и означаваме с $(\sigma^{\alpha\beta})$ обратната матрица

В такъв [redacted] случай имаме

$$D_{x_\alpha} x_\beta = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} - \sum_{\gamma,\delta=1}^{n} \sigma^{\gamma\delta} \frac{\partial F_\gamma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial F_\delta}{\partial x_\beta}$$

Като пример да разгледаме случая $n=1$.Тогава получаваме

$$\Delta u = \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial F_1}{\partial x_\alpha} \frac{\partial F_1}{\partial x_\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \lambda \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial F_1}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha},$$

където многообразието е зададено с уравнението $F_1(x_1, \dots x_p) = 0$,

$$\sigma^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_\alpha}\right)^2$$

и λ се определя от условието $\Delta F_1 = 0$.