Екстремуми на допустими функции върху многообразия с постоянна размелност

Я.Тагамлицки

Нека

$$(1)\qquad \begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_p;\ t_1, \ldots t_q) = 0 \\ &-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - \\ &F_m(x_1, x_2, \ldots, x_p;\ t_1 \ldots t_q) = 0 \end{aligned}$$

е една система с постоянна размерност, където функциите $F_1, F_2, \ldots, F_m$ са гладки в някое отворено множество W на пространството с $p+q$ измерения.

Нека $u(x_1, \ldots x_p; t_1, \ldots, t_q)$ е една гладка функция дефинирана в W. Ще казваме, че тази функция е допустима, ако във всичките точки, които удовлетворяват системата (1) са изпълнени уравненията

$$\frac{\partial u}{\partial t_\gamma} = \sum_{\nu=1}^{n} \rho^\nu \frac{\partial F_\nu}{\partial t_\gamma}, \qquad \gamma = 1, 2, \ldots q$$

при подходящ избор на множителите ρ^ν, $(\nu = 1, \ldots, n)$. Тези множители не са определени еднозначно, ако $r \neq 0$, защото системата

$$(2)\qquad 0 = \sum_{\nu=1}^{n} \rho^\nu \frac{\partial F_\nu}{\partial t_\gamma}$$

е транспонирана на системата на ексцеса и следователно нейния ранг е равен на $q - e$, където e е ексцеса, и с m ранга. Да означим с d размерността и с b брутната размерност на тангенциалната система на (1), а с e^* размерността на системата (2). Тогава имаме

$$e^* = n - (q - e), \quad d = b - e, \quad d = p - r$$
$$b = p + q - m$$

и следователно

$$e^* = (n - m) + r$$

от тук, като вземем под внимание, че

$$n - m \geqq 0, \quad r \geqq 0$$

намираме, че $e^* = 0$ имаме само, ако $m = n$ и $r = 0$.

Очевидно,ако функцията u не зависи от параметрите в W, тя е допустима.Също тъй лесно се вижда,че гладка функция от произволен краен брой допустими функции е пак допустима.

Нека $b=(b_1,b_2,\dots b_p)$ е една точка от графиката на системата (1). Ще казваме че една допустима функция u има лакален максиму в b относно системата (1) ,ако има система от числа $(c_1,\dots c_q)$ такава,че точката $(b_1,b_2,\dots,b_p;c_1,\dots c_q)$ да принадлежи към W ,да удовлетворява системата (1) и освен това да съществува такова $\delta>0$,че за всяка точка $(x_1,x_2,\dots,x_p)$ от графиката на (1) ,за която са изпълнени неравенствата

$$|x_\nu - b_\nu| < \delta \quad , \quad \nu=1,\dots,p$$

могат да се намерят такива числа $t_1,\dots t_q$ удовлетворяващи неравенствата

$$|t_\mu - c_\mu| < \delta \quad \mu=1,\dots,q$$

за които точката $(x_1,\dots x_p;t_1,\dots t_q)$ да принадлежи на W ,да удовлетворява системата (1) и да удовлетворява неравенството

$$u(x_1,x_2,\dots X_p;t_1,\dots t_q) \leqq u(b_1,\dots b_p;c_1,\dots c_q)$$

Ще покажем,че при изброените условия могат да се намерят числата по такъв начин,че в точката $a=(b_1,\dots b_p,c_1,\dots c_q)$ да имаме

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu} = \sum_{\nu=1}^{m} \sigma^\nu \frac{\partial F_\nu}{\partial x_\mu} \, , \quad \frac{\partial u}{\partial t_\tau} = \sum_{\nu=1}^{m} \sigma^\nu \frac{\partial F_\nu}{\partial t_\tau} \, , \quad \begin{matrix} \mu=1,\dots p \\ \tau=1,\dots q \end{matrix}$$

Ние ще наричаме числата $\sigma^1,\sigma^2,\dots,\sigma^m$ множители на Лагранж.

За да докажем съществеването на множителите на Лагранж ще разгледаме някой каноничен клон

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{n+1},\dots X_p) \\ &\dots \\ x_n &= \varphi_n(x_{n+1},\dots X_p) \\ t_1 &= \psi_1(x_{n+1},\dots X_p;t_{m-n+1},\dots t_q) \\ &\dots \\ t_{m-n} &= \psi_{m-n}(x_{n+1},\dots X_p;t_{m-n+1},\dots t_q) \end{aligned}$$

който минава през точката a и да разгледаме функцията

$$V = u(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r, x_{r+1}, \ldots x_p; \psi_1, \ldots \psi_{m-r}, t_{m-r+1}, \ldots t_q).$$

Като вземем под внимание, че функцията u е допустима, заключаваме, че V не зависи от параметрите .
За тази функция лесно се вижда, че притежава локален максимум в обикновения смисъл в точката $(b_1, \ldots b_p)$ и следователно нейните частни производни са нули. Това ни дава

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\alpha} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad \alpha = r+1, \ldots p$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_\alpha} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t_{m-r}}\frac{\partial \psi_{m-r}}{\partial x_\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial t_\beta} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t_{m-r}}\frac{\partial \psi_{m-r}}{\partial t_\beta} = 0 \qquad \beta = m-r+1, \ldots q$$

По такъв начин ние намираме $p + q - m$ линейно независими решения на уравнението

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\lambda_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_p}\lambda_p + \frac{\partial u}{\partial t_1}\mu_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t_q}\mu_q = 0$$

и следователно всичките решения на тангенциалната система удовлетворяват това уравнение. От това заключаваме, че това уравнение представлява линейна комбинация на уравненията на тангенциалната система. С това доказателството е завършено.

От така получения резултат следва веднага, че в точката a имаме

$$D_{x_\alpha} u = 0 \qquad \alpha = 1, \ldots, p.$$