Галилеевият принцип за относителността и понятието сила

Я.Тагамлицки

В тази работа ние ще дадем математическа формулировка на принципа за относителността на Галилей и ще го използваме, за да дефинираме понятието сила.

Да разгледаме уравненията на динамиката

$$(1) \qquad m_\nu \ddot{x}_\nu = f_\nu (x_1, x_2, \ldots, x_n; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$$

$\nu = 1, \ldots n$

за n точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с маси $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Ще предполагаме, че функциите

$$f_\nu (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$$

на независимите променливи $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$

са аналитични в цялото простронство с евентуални особености.

Да извършим галилеевата трансформация

$$x = a + v t + A x',$$

където a и v са постоянни вектори и A е независеща от времето ортогонална матрица с детерминанта 1.

Ние можем да извършим тази трансформация, въпреки че допуснахме възможността функциите f_ν да не бъдат дефинирани в някои точки, защото ги разглеждаме като функции в цялото пространство с евентуални особености. По такъв начин уравненията (1) се преобразуват в

$$m_\nu A \ddot{x}'_\nu = f_\nu (a + vt + A x'_1, \ldots a + vt + A x'_n; v + A\dot{x}'_1, \ldots v + A\dot{x}'_n)$$

$\nu = 1, \ldots n$

или още

$$m_\nu \ddot{x}'_\nu = A^{-1} f_\nu (a + vt + A x'_1, \ldots, a + vt + A x'_n; v + A\dot{x}'_1, \ldots, v + A\dot{x}'_n)$$

При този начин на написване на уравненията левите им страни не зависят от извършената трансформация. Ще казваме, че е изпълнен галилеевият принцип за относителността, ако десните страни също не зависят от трансформацията.

Като вземем под внимание,че единтитетът е специално галилеева трансформация,получаваме следното функционално уравнение

$$A^{-1} f_\nu(a+vt+Ax'_1,\dots,a+vt+Ax'_n;\ v+A\dot{x}'_1,\dots,v+A\dot{x}'_n) = f(x'_1,\dots,x'_n;\ \dot{x}'_1,\dots,\dot{x}'_n)$$

От друга страна теоремата за съществуване на интеграли на диференциални уравнения ни дава възможност за всеки момент t_0 да съставим решение $x'_\nu(t)$ на системата (1) ,което удовлетворява началните условия $x'_\nu(t_0)=\xi_\nu,\ \dot{x}'_\nu(t_0)=\eta_\nu$,стига точката $(\xi_1,\dots,\xi_n;\ \eta_1,\dots,\eta_n)$ да не е особена.Това ни дава възможност да твърдим,че са изпълнени равенствата

$$(2)\quad A^{-1} f_\nu(a+vt+A\xi_1,\dots,a+vt+A\xi_n;\ v+A\eta_1,\dots,v+A\eta_n) =$$

$$= f_\nu(\xi_1,\dots,\xi_n;\ \eta_1,\dots,\eta_n),$$

където $\xi_1,\dots,\xi_n;\ \eta_1,\dots,\eta_n$ са независими променливи.

Решенията на уравнението (2) ще наричаме сили от n точки.

Да припомним следните дефиниции.Скаларна функция $P(r_1,\dots r_k)$ на векторите $r_1,\dots,r_k$ се нарича инварианта,ако за всяка ортогонална матрица A с детерминанта 1 имаме

$$P(Ar_1,\dots,Ar_k) = P(r_1,\dots r_k).$$

Векторна функция $F(r_1,\dots,r_k)$ на векторите $r_1,\dots r_k$ се нарича комутанта,ако имаме

$$F(Ar_1,\dots,Ar_k) = AF$$

при всеки избор на ортогоналната матрица A с детерминанта 1.

Общото решение на уравнението (2) е

$$f_\nu(\xi_1,\dots \xi_n;\ \eta_1,\dots \eta_n) = F(\xi_2-\xi_1,\dots \xi_n-\xi_1;\ \eta_2-\eta_1,\dots \eta_n-\eta_1),$$

където $F(r_1,\dots r_{n-1};\ u_1,\dots,u_{n-1})$ е комутанта.

Сега да се занимаем с представянето на комутантите. Разглежданията ще извършим в пространство с произволен брой измерения,чакар че за нуждите на механиката бихме могли да се ограничим с вектори в триизмеримото пространство.

Скаларното произведение да два вектора е очевидно инварианта. Специалната векторна функция $F(r)=r$ на вектора r е очевидно комутанта. Инварианта от комутанти е инварианта. Комутанта от комутанти е комутанта.

За да бъде една векторна функция $F(r_1,\dots,r_n)$ комутанта е необходимо и дастатъчно скаларното произведение

$$\left(F(r_1,\dots,r_n),r\right)$$

да бъде инварианта. Необходимостта се вижда веднага от равенствата

$$\left(F(Ar_1,Ar_2,\dots,Ar_n),Ar\right)=\left(AF(r_1,\dots,r_n),Ar\right)=$$
$$=\left(F(r_1,\dots,r_n),r\right)$$

Да докажем, че условието е достатъчно. Нека скаларното произведение

$$\left(F(r_1,\dots,r_n),r\right)$$

е инвариант, т.е.

$$\left(F(Ar_1,\dots,Ar_n),Ar\right)=\left(F(r_1,\dots,r_n),r\right)$$

при произволен избор на ортогоналната матрица A с детерминанта 1 . От друга страна

$$\left(F(r_1,\dots,r_n),r\right)=\left(AF(r_1,\dots,r_n),Ar\right)$$

и следователно, ако положим

$$x=F(Ar_1,\dots,Ar_n)-AF(r_1,\dots,r_n)$$

ще имаме

$$(x,Ar)=0$$

при всяко r . Да изберем

$$r=A^{-1}x$$

Това ни дава

$$(x, X) = 0$$

и следователно $x = 0$.

Сега ще конструираме комутанта на $m-1$ вектора $x_\nu = (x_{\nu 1}, \dots, x_{\nu m})$, където m е размерността на разглежданото пространство, и $\nu = 1, \dots, m-1$.

Детерминантата

$$[x, x_1, \dots, x_{m-1}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-1\,1} & x_{m-1\,2} & \dots & x_{m-1\,m} \end{vmatrix}$$

където $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ е инварианта, както това се вижда от правилото за умножени на детерминанти. Да означим с A_α адюнгираното количество на x_α. Тогава скаларното произведение

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m = [x, x_1, \dots, x_{m-1}]$$

е инвариант и следователно векторната функция

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$$

е комутанта. В това, което следва, ние ще използуваме означението

$$A = [x_1, x_2, \dots, x_{m-1}]$$

Сега вече можем да получим онова представяне на комутантите, от което имаме нужда.

Нека $F(x_1, \dots, x_k)$ е комутанта на произволен брой вектори и $r_1, \dots, r_{m-1}$ са $m-1$ на брой линейно независими вектори, където m е размерността на разглежданото пространство. Тогава

$$(3) \qquad F(x_1, \dots x_k) = P_1 r_1 + \dots + P_{m-1} r_{m-1} + P_m [r_1, r_2, \dots, r_{m-1}]$$

Където

$$P_\alpha = P_\alpha(x_1, \ldots, x_k; r_1, \ldots, r_{m-1})$$

са инварианти на променливите $x_1, \ldots, x_k, r_1, \ldots, r_{m-1}$. Обратното е също вярно, т.е. ако P_α са инварианти, то F_1 е комутанта.

Втората част на твърдението е очевидна. За да докажем първата част ще покажем, че векторите

$$r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}, [r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}]$$

са линейно независими. И наистина, ако допуснем, че имаме

$$\lambda_1 r_1 + \ldots + \lambda_{m-1} r_{m-1} + \lambda_m [r_1, r_2, \ldots r_{m-1}]$$

ще получим, като умножим скаларно с $[r_1, \ldots, r_{m-1}]$.

$$\lambda_m ([r_1, \ldots, r_{m-1}], [r_1, \ldots r_{m-1}]) = 0$$

т.е. $\lambda_m = 0$, защото

$$[r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}] \neq 0$$

поради линейната независимост на векторите $r_1, \ldots, r_{m-1}$

По такъв начин получаваме

$$\lambda_1 r_1 + \ldots + \lambda_{m-1} r_{m-1} = 0$$

и следователно $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{m-1} = 0$.

Сега ние добихме възможност да намерим коефициентите $P_1, P_2, \ldots P_{m-1}, P_m$ тъй, че да имаме

$$F_1 = P_1 r_1 + \ldots + P_{m-1} r_{m-1} + P_m [r_1, \ldots, r_{m-1}]$$

Като умножим скаларно с r_α получаваме

$$(r_\alpha, F) = P_1 (r_\alpha, r_1) + \dots + P_{m-1} (r_\alpha, r_{m-1}).$$

Това е една линейна система относно $P_1, \dots, P_{m-1}$, чиито коефициенти и свободни членове са инварианти. Детерминантата е различна от нула, защото това е детерминантата на Грам. По такъв начин ние виждаме, че $P_1, \dots, P_{m-1}$ са инварианти. Коефициента P_m определяме от

$$([r_1, \dots r_{m-1}], F) = P_m ([r_1, \dots, r_{m-1}], [r_1, \dots r_{m-1}])$$

от където се вижда, че и той е инвариант.

Като пример да разгледаме сила действуваща между две точки. Нека точките имат радиус вектори x_1, x, скоростите им са u_1, u и масите m_1, m. Като се възползуваме от свободата, която имаме при избора на векторите $r_1, \dots r_{m-1}$ в представянето (3) ние ще положим $r_1 = x - x_1$, $r_2 = u - u_1$. По такъв начин получаваме за силата f, която действува върху точката x следното представяне

$$f = P(x - x_1) + Q(u - u_1) + R[x - x_1, u - u_1],$$

където

$$P = P(x - x_1, u - u_1)$$

$$Q = Q(x - x_1, u - u_1)$$

$$R = R(x - x_1, u - u_1)$$

са инварианти.

Уравненията на динамиката в нашия случай добиват вида

$$m\ddot{x} = P(x - x_1) + Q(u - u_1) + R[x - x_1, u - u_1]$$

и аналогично

$$m_1\ddot{x}_1 = P_1(x - x_1) + Q_1(u - u_1) + R_1[x - x_1, u - u_1]$$