МЕТОДИЧЕСКИ УКАЗАНИЯ ЗА ПОДПОМАГАНЕ САМОСТОЯТЕЛНАТА РАБОТА ПО ДИФЕРЕНЦИАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ НА СТУДЕНТИТЕ ЗАДОЧНИЦИ ПО МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА*

проф. Ярослав Тагамлицки

Диференциалното и интегралното смятане е един основен математически предмет. Той е необходим за разбирането на редица други предмети, които се изучават в специалностите математика и физика. Студентите трябва да знаят това, когато се готвят по диференциално и интегрално смятане. Често пъти обаче начинаещите срещат затруднения при изучаването на този предмет. Отначало тези затруднения са нормални и се дължат на естеството на материята. Когато се появяват при първо четене, те не бива да смущават никого. При второ четене, когато студентът има общ поглед върху предмета, те сами отпадат в по голямата си част. Ако студентът правилно е организирал работата си при първо четене, при второ четене въобще няма да има затруднения. Всеки студент обаче трябва да знае какво значи *правилно да се организира работата върху един математически предмет*. Този въпрос се разглежда в настоящото методическо указание.

I. КАКВИ ПРЕДВАРИТЕЛНИ ЗНАНИЯ СА НЕОБХОДИМИ

За да може успешно да се изучава висшата математика, трябва да са налице необходимите знания и сръчности от еле-

---

* Настоящият текст е бил отпечатан (с незначителни изменения) на циклостил през юли 1965 г. в циклостилната база на Софийския университет. — *Бел. съст.*

ментарната математика, които се предвиждат от програмата на средните политехнически училища.

Нямаме възможност и не си поставяме за цел да направим цялостен преговор на елементарната математика. Ще споменем само някои по-често срещани формули.

Трябва да се знае формулата за сумата от членовете на геометричната прогресия. В най-простия си вид тя се записва така:

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}.$$

За да се убедим във верността на тази формула, достатъчно е да се освободим от знаменателя (извършете това!). Формулата е валидна при $x \neq 1$.

Често се използуват формули от тригонометрията, по-важните от които са следните:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2},$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2},$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2},$$

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

Важни са формулите от алгебрата

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad \lg ab = \lg a + \lg b,$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad \lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b,$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad \lg a^x = x \lg a,$$

$$a^0 = 1, \qquad \lg 1 = 0.$$

Квадратното уравнение

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

се решава с помощта на формулата

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}.$$

Корените x_1 и x_2 на квадратното уравнение са свързани с коефициентите му със зависимостите

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_0}, \qquad x_1 x_2 = \frac{a_2}{a_0}.$$

Квадратният тричлен $a_0x^2 + a_1x + a_2$, чиито нули са x и x_2, се, разлага на множители по следния начин:

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = a_0(x - x_1)(x - x_2).$$

Всеки студент трябва да умее сръчно да извършва елементарни алгебрични преобразувания.

Сега ще направим няколко бележки, които ще ни трябват по-късно.

Понятията, с които си служим в математиката, биват два вида — първични и производни. Производните понятия се въвеждат чрез дефиниции и по такъв начин стават използваеми при математическите разсъждения. Първичните понятия не се въвеждат чрез дефиниции. Такива например са понятията от логиката „нека“, „е“, „не“, „вярно“, „всеки“, „съществува“, „съждение“, „следва“ и пр. Такива са и понятията от теорията на множествата, като „елемент“, „принадлежи“, „множество“ и пр. Първичните понятия участвуват в математическите разсъждения чрез техните свойства, за които се предполага, че са известни на всеки здравомислещ човек. Това се предполага дори тогава, когато правим законите на логиката предмет на нашето изследване, както това става в математическата логика. Въпросът, как човекът по естествен път в една или друга степен овладява законите на логиката, е извън рамките на това, което искаме да разгледаме тук. За нашите цели ще бъде достатъчно да споменем, че способността за логическо мислене се поддава на развитие чрез упражнение. Това се постига в най-съвършена форма чрез изучаване на математиката. Този процес се облекчава чрез разглеждане на следните два примера из областта на логиката.

Пример 1. Нека M и N са две множества, чиито елементи могат да бъдат съвсем произволни. Съждението

„не е вярно, че всеки елемент на M принадлежи на N"

е равносилно със съждението

„вярно е, че съществува елемент на M, който не принадлежи на N".

Последната мисъл се изразява понякога, като се казва, че поне един елемент на M не принадлежи на N.

Пример 2. Нека M и N означават пак две произволни множества. Съждението

„не е вярно, че съществува елемент на M, който принадлежи на N",

е равносилно със съждението

„вярно е за всеки елемент от M, че не принадлежи на N".

Последната мисъл се изразява понякога, като се казва, че никой елемент на M не принадлежи на N.

Впоследствие ще видим, че тези два примера са важни.

Съждение от вида

„всеки елемент на едно множество M има някакво свойство"

ще наричаме съждение за общност. Съждение от вида

„съществува елемент от едно множество M, който има някакво свойство",

ще наричаме съждение за съществуване.

От двата примера, които разгледахме, се вижда, че отрицанието на едно съждение за общност е равносилно с едно съждение за съществуване, а отрицанието на едно съждение за съществуване е равносилно с едно съждение за общност.

Двата примера, които дадохме, трябва да се обмислят добре. Целесъобразно е да се направи упражнение, като за M и N се изберат конкретни множества. Нека например M е множеството на студентите задочници, а N — множеството на спортистите. Разгледайте двата примера при този избор на M и N.

Често пъти се налага да се образуват отрицания и на по-сложни съждения. Това става обаче по същия принцип.

Да разгледаме следния пример: Нека X е множеството на химическите съединения, E — множеството на химическите радикали и Δ — множеството на химическите реакции. Да образуваме следното съждение:

„На всеки химически радикал ε може да се съпостави такава реакция δ, че ако едно съединение x влиза в реакцията δ, това съединение съдържа радикала ε."

Да съставим отрицанието на това съждение. Най-добре е предварително да прередактираме съждението, като си служим само със съждения за общност и за съществуване. Това може да стане така: за всеки химически радикал ε съществува такава реакция δ, че всяко съединение x, което влиза в реакцията δ, съдържа радикала ε.

Думите, които изразяват условията за общност (всеки, всяко), са подчертани с една черта, а думата, която изразява условие за съществуване, е подчертана с две черти.

Сега сме готови да съставим отрицанието. Това може да стане например, като пред интересуващото ни съждение поставим думите „не е вярно, че". По такъв начин получаваме съждението:

„Не е вярно, че за всеки химически радикал ε съществува такава реакция δ, че всяко съединение x, което влиза в реакцията δ, съдържа радикала ε."

Подчертахме думите, които изразяват отрицанието с вълнообразна черта. Това обаче не е единственият начин, по който може да се изкаже това отрицание. При тази редакция отрицанието се отнася до едно съждение, което съдържа две условия за общност и едно условие за съществуване. Обаче същата мисъл може да се предаде и така:

„Съществува химически радикал ε, за който не е вярно, че съществува такава реакция δ, че всяко съединение x, което влиза в реакцията δ, съдържа радикала ε."

Тази нова редакция може формално да се получи, като първото условие за общност се замести с условие за съществуване и отрицанието се премести след него. Ако първото условие беше условие за съществуване, щяхме да го заместим с условие за общност.

Но ние можем, без да изменим смисъла, да преместим отрицанието още по-далеч по следния начин:

„Съществува химически радикал ε, за който при всеки избор на реакцията δ не е вярно, че всяко съединение x, което влиза в реакцията δ, съдържа радикала ε."

При това прередактиране условието за съществуване, което непосредствено следваше отрицанието, се замести с условие за общност и отрицанието се премести след него.

Но в така полученото съждение може да се извърши още едно преместване на отрицанието по следния начин:

„Съществува химически радикал ε, за който при всеки избор на реакцията δ съществува съединение x, което влиза в реакцията δ, но не съдържа радикала ε."

При тази редакция отрицанието не се отнася до никои от условията за съществуване и общност, които се срещат в съждението. В математическите разсъждения се използува най-често тази форма на отрицанието. Всеки студент трябва да умее да я образува направо (без да преминава през разните междинни форми, които тук подробно написахме). Това може да се постигне, като всяко от условията за общност се замести с условие за съществуване, всяко от условията за съществуване се замести с условие за общност и отрицанието се постави така, че да не се отнася до никое от условията за общност и съществуване, които участвуват в съждението*. Направете опит да извършите това самостоятелно. Полезно е да се упражните, като образувате по горното правило отрицанията на следните съждения:

1) „Всяка планина е залесена".

2) „Във всяка планина има вековни гори".

3) „Във всяка планина има гори, в които всички дървета са вековни".

II. ЗА РОЛЯТА НА ДЕФИНИЦИИТЕ

Дефинициите в математиката играят много важна роля. Чрез тях се въвеждат производните понятия, които се използуват при изказването на теоремите и дефинициите на други производни понятия, както и при изграждането на доказателствата. За нашите цели обаче ще бъде особено важно да изясним, че производните понятия се включват в математическите разсъждения *чрез дефинициите*. По такъв начин дефинициите се използу-

* По-късно проф. Тагамлицки изразяваше безпокойство от това, че някои студенти се научават да прилагат правила от този вид формално, без да се ръководят от смисъла на нещата, и по този начин се опитват да скрият липсата на разбиране. — *Бел. Д. Скордев.*

ват при доказателствата на теоремите. Това ще поясним с няколко примера.

Пример 1. Често пъти се използуват следните две дефиниции:

а) Казваме, че едно множество M от реални числа е *ограничено отгоре*, ако съществува такова реално число a, че при всяко x от M да имаме $x \leqq a$. Всяко число a с това свойство се нарича *горна граница* на M.

б) Най-малката от горните граници на едно ограничено отгоре множество от реални числа се нарича негова *точна горна граница.*

Тези дефиниции (както и всички останали) трябва не само да се помнят, но и да се разбират. За да си изясните за какво става дума, най-добре разгледайте няколко примера. Например разгледайте множеството на всичките отрицателни числа. Ограничено ли е то отгоре? Можете ли да посочите някоя горна граница на това множество? Колко горни граници можете да посочите? Има ли измежду тези горни граници най-малка? Можете ли да посочите множество от реални числа, което не е ограничено отгоре?

Понятията, които се въвеждат от тези две дефиниции, участвуват във формулировката на т. нар. принцип за непрекъснатост, който може да се изкаже по следния начин: *Всяко ограничено отгоре множество от реални числа има точна горна граница.*

За да покажем как се използуват дефинициите при изграждането на доказателствата, ще разгледаме следната теорема:

Множеството на целите положителни числа не е ограничено отгоре.

Доказателство. Нека N е множеството от целите положителни числа. Да допуснем, че N е ограничено отгоре. В такъв случай съгласно принципа за непрекъснатост множеството N ще притежава точна горна граница n. Да разгледаме числото $n-1$. Това число е строго по-малко от n, а числото n *съгласно втората дефиниция* е най-малката от горните граници на N. Оттук заключаваме, че $n-1$ не е горна граница на N и следователно *съгласно първата дефиниция* поне за едно число x от N ще имаме $n-1<x$. Оттук намираме $n<x+1$. Числото x е цяло положително. Следователно $x+1$ е също цяло положително число. Обаче n е горна граница на N и следователно *съгласно първата дефиниция* имаме $x+1 \leqq n$, което противоречи на полученото неравенство $n<x+1$. И така допускането, че множеството N е ограничено отгоре, води до противоречие, т. е. множеството N не е ограничено отгоре, с което доказателството е завършено.

По такъв начин в това доказателство първата дефиниция се използува два пъти и втората дефиниция — един път.

Пример 2. Особено важна роля играе следната дефиниция на понятието граница на редица от реални числа:

Казваме, че редицата от реални числа

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е сходяща и числото a е нейна граница, ако за всяко положително число ε може да се намери число k така, че при $n>k$ да имаме

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

За да се разбере за какво става дума, най-добре е и тук да се вземе някой пример.

Да разгледаме редицата

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \tag{1}$$

и да покажем, че 0 е нейна граница. За тази цел да изберем положително число ε и да потърсим за какви стойности на n е изпълнено неравенството

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

или все едно неравенството

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

За тази цел решаваме това неравенство относно n и получаваме $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Да положим $k = \frac{1}{\varepsilon}$. Тогава при $n>k$ имаме $n > \frac{1}{\varepsilon}$ и следователно $\frac{1}{n} < \varepsilon$, или

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

С това при всяко положително ε намерихме k така, че при $n>k$ да имаме $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, т. е. показахме, че редицата (1) е сходяща и 0 е нейна граница.

Дефиницията на понятието сходимост трябва да се разбере и да се запомни. Запомнянето обаче трябва да бъде съзнателно, т.е. трябва да се запомни *смисълът* на дефиницията. Вие ще се доближите до тази цел, ако се опитате да повторите дефиницията, като се ръководите от това, което направихме в конкретния разгледан пример. Спомнете си, че избрахме едно произволно положително число ε, с негова помощ съставихме неравенството

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \tag{2}$$

и се помъчихме да изследваме за какви стойности на n то е изпълнено. Това изследване ни даде възможност да намерим такова число k, че при $n>k$ да бъде изпълнено неравенството (2). Ние избрахме $k=\frac{1}{\varepsilon}$. Но добре е да си изясните, че целта се постига също, ако изберем $k>\frac{1}{\varepsilon}$.

Сега с един пример ще покажем как дефиницията на понятието граница се използува при изграждането на доказателства. За тази цел да разгледаме следната теорема:

Ако редицата

$$a_1,\ a_2, \ldots \tag{3}$$

е сходяща и числата a *и* b *са нейни граници, то* $a=b$.

Доказателство. Да допуснем противното, т. е. че $a\neq b$. В такъв случай числото $|a-b|$ е положително. Да разгледаме числото

$$\frac{|a-b|}{2}. \tag{4}$$

Това число е също тъй положително. Числото a е обаче граница на редицата (3). *Съгласно дефиницията на понятието граница* на положителното число (4) може да се съпостави число k така, че при $n>k$ да имаме

$$|a_n-a|<\frac{|a-b|}{2}. \tag{5}$$

Числото b обаче също е граница на редицата (3). Следователно пак *съгласно дефиницията на понятието граница* можем да намерим число k_1 по такъв начин, че при $n>k_1$ да имаме

$$|a_n-b|<\frac{|a-b|}{2}. \tag{6}$$

Да дадем на n стойност, по-голяма и от k, и от k_1. При такава стойност на n ще бъдат изпълнени и двете неравенства (5) и (6) и следователно

$$|a_n-a|+|a_n-b|<\frac{|a-b|}{2}+\frac{|a-b|}{2}=|a-b|. \tag{7}$$

От друга страна,

$$|a_n - a| + |a_n - b| = |a - a_n| + |a_n - b| \geqq |(a_n - a) + (a_n - b)|$$
$$= |a - b|,$$

което противоречи на неравенството (7). С това е показано, че не можем да имаме $a \neq b$, и доказателството е завършено.

Броят на теоремите, чието доказателство се гради върху дефиницията на понятието граница, е голям. Няколко теореми, които са подходящи за първоначални упражнения върху дефиницията на понятието граница, се съдържат в § 5, гл. II, част I на учебника по диференциално смятане. При доказателството на тези теореми трябва да се обръща внимание върху това, къде се използува дефиницията на понятието граница. Голяма полза ще извлечете, ако самостоятелно докажете някоя теорема, в която се прилага тази дефиниция. Докажете например, че ако редицата

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

от числа, които са различни от нула, е сходяща и клони към различна от нула граница a, то редицата

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots$$

е сходяща и клони към $\frac{1}{a}$. Тук се иска да докажете това не като следствие от правилото за почленно деление на сходящите редици, а като изхождате непосредствено от дефиницията на понятието граница. Ако не се досетите самостоятелно как да извършите това, разгледайте доказателството на правилото за почленно деление на сходящи редици, което се съдържа в споменатия § 5. Това доказателство решава един по-общ въпрос и следователно съдържа всичко, което е потребно и за нашия частен случай.

Вече споменахме, че теоремите, в които участвува дефиницията на понятието граница, са многобройни. Трябва да добавим още, че понятието граница се използува в много други дефиниции, каквато е например дефиницията на понятието сума на сходящ безкраен ред, дефиницията на понятието производна и пр. Поради всичко казано досега усилията за едно *съзнателно* усвояване на дефиницията на понятието граница създават необходимите предпоставки за разбирането на материята.

Особено внимание трябва да се обърне върху следните дефиниции:

1) дефиницията на понятието граница на сходяща редица от числа;

2) дефиницията на понятието сходящ ред и на понятието сума на сходящ ред;

3) двете дефиниции на понятието граница на функция;

4) двете дефиниции на понятието непрекъснатост;

5) дефиницията на понятието равномерна непрекъснатост;

6) дефинициите на понятието производна;

7) дефиницията на понятието определен интеграл;

8) дефиницията на понятието равномерна сходимост.

С това, разбира се, не се изчерпват дефинициите, които трябва да се усвоят. Изброените дефиниции обаче играят особено важна роля и се използуват много често.

III. КАКВИ СА ПЪТИЩАТА ЗА СЪЗНАТЕЛНОТО УСВОЯВАНЕ НА ЕДНА ДЕФИНИЦИЯ

С всяка дефиниция ние се уславяме да казваме нещо,ако е изпълнено някакво множество от условия*. Така например уславяме се да казваме, че една функция $f(x)$ е непрекъсната в дадена точка x_0 от дефиниционната си област, ако на всяко положително число ε може да се съпостави положително число δ по такъв начин, че за всяко x от дефиниционната област на $f(x)$, за което е изпълнено неравенството $|x-x_0|<\delta$, да имаме

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

За всяка дефиниция могат да се поставят следните въпроси:

1. Има ли случаи, когато интересуващите ни условия са изпълнени?

2. Има ли случаи, когато интересуващите ни условия не са изпълнени?

3. За какво може да ни послужи дефиницията?

Да поставим първия въпрос за дефиницията на понятието непрекъснатост.

Не е трудно да се посочат непрекъснати функции. Нека например функцията $f(x)$ е дефинирана при всяко x с равенството

$$f(x)=ax+b.$$

Ще покажем, че тя е непрекъсната във всяка точка x_0. За тази цел да изберем произволно положително число ε и да се опитаме

* Това множество от условия може да бъде и празно, т. е. могат и да не се поставят никакви условия.

да изследваме при какви стойности на x е изпълнено неравенството

(8) $\quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$

или все едно неравенството

(9) $\quad |(ax+b)-(ax_0+b)|<\varepsilon.$

Това неравенство може да се напише още във вида

(10) $\quad |a|\,|x-x_0|<\varepsilon.$

Сега е ясно, че ако $a\neq 0$, това неравенство, а следователно и неравенството (8) са изпълнени тогава и само тогава, когато

$$|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{|a|}.$$

Ако ли пък $a=0$, то неравенството (10), а следователно и неравенството (8) са изпълнени при всяко x. Ако $a\neq 0$, нека положим

$$\delta=\frac{\varepsilon}{|a|}$$

(или дори δ можем да изберем произволно от интервала $0<\delta \leqq \frac{\varepsilon}{|a|}$). Ако $a=0$, с δ ще означим произволно положително число. В такъв случай при $|x-x_0|<\delta$ ще бъде изпълнено неравенството (10), а следователно и неравенството (8). Този пример ни показва, че съществуват непрекъснати функции.

Сега ще имате полза, ако направите опит да повторите самостоятелно дефиницията на понятието непрекъснатост, като се ръководите от това, което направихме, за да покажем, че функцията $f(x)=ax+b$ е непрекъсната в точката x_0: ние избрахме едно произволно положително число ε, съставихме неравенството (8), изследвахме за какви стойности на x то е изпълнено и видяхме, че може да се избере положително число δ така, че при $|x-x_0|<\delta$ да бъде изпълнено неравенството (8).

Да поставим втория въпрос за дефиницията на понятието непрекъснатост: Има ли функции, които не удовлетворяват условието за непрекъснатост? На този въпрос пак ще отговорим с помощта на един пример. Нека дефинираме функция $\varphi(x)$ при всяко x, като положим $\varphi(x)=x$ при $x\neq 0$ и $\varphi(0)=1$. Ще покажем, че функцията $\varphi(x)$ не удовлетворява условието за непрекъснатост в точката 0. За тази цел ще изберем положително число ε и ще разгледаме неравенството

(11) $\quad |\varphi(x)-\varphi(0)|<\varepsilon.$

Да дадем на x стойност, различна от нула. В такъв случай неравенството (11) добива вида

$$(12)\qquad |x-1|<\varepsilon.$$

Да направим опит при $\varepsilon=\frac{1}{2}$ да намерим положително число δ по такъв начин, че при $|x-0|<\delta$ винаги да бъде изпълнено неравенството (12). Но както и да избираме положителното число δ, неравенството $|x-0|<\delta$ сигурно е изпълнено например, когато x е равно на по-малкото от двете числа $\frac{\delta}{2}$ и $\frac{1}{4}$, докато неравенството (12) не е изпълнено при тази стойност на x, защото

$$|x-1|=1-x\geq 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}>\frac{1}{2}.$$

(Разбира се, не е съществено, че дадохме на ε точно стойността $\frac{1}{2}$. Бихме могли да изберем ε произволно, стига да бъдат изпълнени неравенствата $0<\varepsilon<1$.) И така намерихме такова положително число ε, че както и да избираме положителното число δ, винаги има поне едно число x, за което неравенството $|x-0|<\delta$ е изпълнено, но неравенството (11) е нарушено, т. е. функцията $\varphi(x)$ не удовлетворява условието за непрекъснатост в точката 0.

Начертайте графиката на функцията $\varphi(x)$! Функцията $\varphi(x)$ се отличава от линейната функция x по стойността, която приема в точката 0. Вече имахме случай да видим, когато разглеждахме първия пример, че линейната функция $ax+b$ е непрекъсната във всяка точка. По-специално функцията x (която се получава при $a=1$ и $b=0$) също е непрекъсната във всяка точка. Сравнете графиката на линейната функция x с графиката на $\varphi(x)$!

Много е важно правилго да умеем да образуваме отрицания. Това се налага да правим например, когато доказваме чрез допускане на противното. По-специално често се налага да образуваме отрицанието на условието за непрекъснатост. Направете опит да образувате това отрицание, т. е. да кажете какво значи една функция $f(x)$ да не удовлетворява условието за непрекъснатост в дадена точка x_0 от дефиниционната си област. Ръководете се от примера, който разгледахме: ние съставихме неравенството (11) и можахме да намерим такова число ε (например числото $\varepsilon=\frac{1}{2}$), че както и да избираме положителното число δ, винаги може да се намери число x (посочете едно такова число в нашия случай), за което е изпълнено неравенството $|x-0|<\delta$, но неравенството (11) е нарушено. Ако не можете лесно да образувате отрицанието, използувайте общото правило за образуване на отрицанията, което изяснихме подробно в началото.

Преминаваме към третия въпрос: За какво може да ни послужи дефиницията на понятието непрекъснатост? Отговор на този въпрос ни дават теоремите и дефинициите, в които се използува интересуващото ни понятие. Така понятието непрекъснатост се използува във формулировката и в доказателството на теоремата на Вайерщрас, на теоремата на Рол, на теоремата на Лайбниц и Нютон и пр. Тъй като тези теореми са важни за математиката и нейните приложения, затова се налага да изучаваме и дефиницията на понятието непрекъснатост. Ще споменем, че има случаи, когато понятието непрекъснатост не се използува във формулировката на теоремата, а само в доказателството. Така например в § 17, гл. III, част II на учебника по диференциално смятане се твърди, че при $-1 \leqq x \leqq 1$ имаме развитието

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Тук не се говори нищо за непрекъснатост. В изложеното доказателство обаче се използува непрекъснатостта на функцията $\operatorname{arctg} x$ при $x=1$.

Най-убедителен отговор на третия въпрос ще получите, когато сами успешно приложите поне един път дефиницията. За тази цел трябва да решите някоя съдържателна задача или да възпроизведете самостоятелно доказателството на някоя теорема, където тази дефиниция се използува.

Такива са пътищата за съзнателното усвояване на смисъла на една дефиниция. Тези три въпроса трябва да се поставят винаги когато отговорът им не е ясен от само себе си. Тяхното място е при първото четене. Тези въпроси са поставени и подробно са разгледани навсякъде, където това е необходимо в учебника по диференциално и интегрално смятане. Тези въпроси са важни и при първо четене не бива в никой случай да се прескачат.

IV. КАК ДА ОБМИСЛЯМЕ ФОРМУЛИРОВКИТЕ НА ТЕОРЕМИТЕ

Ако не можем да разберем за какво става дума в една теорема, първо трябва да видим дали са ни известни дефинициите на всичките производни понятия, които участвуват във формулировката на тази теорема. Не е достатъчно думите да ни изглеждат познати. Трябва те действително да ни бъдат познати, т. е. да знаем съответните дефиниции. Ако установим, че не знаем някоя дефиниция, трябва да я научим. За целта не е достатъчно да прочетем дефиницията, а да я усвоим съзнателно с цялата необходима грижливост.

Полезно е да се разгледат от различни страни предположенията на теоремата. Защо са поставени? Можем ли да посочим пример, когато заключението престава да бъде валидно, ако някое от условията не е изпълнено? Можем ли някое условие да заменим с по-общо? Можем ли да посочим пример, когато са изпълнени всичките условия? В такъв случай заключението трябва да бъде изпълнено. Изпълнено ли е то действително? Срещали ли сте други теореми, в които се правят такива или подобни предположения?

Полезно е да разгледате по-внимателно заключението на теоремата. Срещали ли сте други теореми със същото или подобно заключение? Изглежда ли правдоподобно, че от направените предположения може да се направи такова заключение? Ако имате съмнения, които ви се струва, че са основателни, т. е. ако имате предвид пример, който противоречи на теоремата, разгледайте този пример по-внимателно. Трябва да откриете, че или някое от предположенията не е изпълнено, или заключението не е изпълнено. Ако ви се струва, че теоремата е правдоподобна, полезно е да обмислите не може ли от същите предположения да се направи по-силно заключение.

Голяма полза ще имате, ако разгледате някои приложения на теоремата. Това често пъти хвърля светлина и върху постановката на въпроса. Много полезно ще бъде и разглеждането на доказателството. И това допринася много за разбирането. Приложенията и доказателството ни помагат да оценим и значението на теоремата.

V. КАК ДА ИЗУЧАВАМЕ ДОКАЗАТЕЛСТВАТА

Всяко доказателство се изгражда с помощта на законите на логиката. Те се овладяват най-добре чрез упражнения върху доказателства на теореми. За всяка стъпка в доказателството трябва да се питаме въз основа на какво се прави.

Във всяка теорема има някакво множество от предположения и някакво заключение. За всяко от предположенията трябва да се питаме къде то се използува в доказателството.

Всяко доказателство се изгражда въз основа на аксиомите, от които изхождаме, въз основа на дефинициите, които сме дали, и въз основа на теоремите, които сме доказали. Поради това, за да може да се разбере едно доказателство, тези неща трябва да се знаят. В курса по диференциално и интегрално смятане особено важна роля играе аксиомата, която понякога се нарича „принцип за непрекъснатост“. Тази аксиома споменахме в раздел II. Въз основа на тази аксиома се доказват теоремата на Кантор, теоремата на Болцано — Вайерщрас, принципът за компактност, теоремата на Вайерщрас, теоремата на Рол и пр.

Всичко казано дотук най-добре може да се разбере с помощта на пример. За тази цел да разгледаме теоремата, която гласи, че ако една функция $f(x)$ е непрекъсната в едно компактно множество M, тя е ограничена.

Преди да пристъпим към доказателството, първо трябва да разберем за какво се говори в теоремата, а за това е необходимо да знаем смисъла на всички думи, които участват в нейната формулировка. Знаем ли какво значи „непрекъсната функция“? Знаем ли какво значи „компактно множество“? Знаем ли какво значи „ограничена функция“? Тези въпроси трябва да се разбират така: Знаем ли *дефинициите* на тези понятия? Разбира се, полза от следващите редове ще има само ако читателят помни и разбира тези дефиниции. Ако това условие не е изпълнено, първо трябва да се разгледат съответните страници от учебника.

Ще разгледаме доказателството подробно, като ще се спрем по-специално на следните въпроси:

1. В теоремата се предполага, че функцията $f(x)$ е непрекъсната, а множеството M е компактно. Къде в доказателството се използуват тези предположения?

2. Каква е ролята на дефинициите при изграждането на доказателството?

3. Каква е ролята на теоремите и аксиомите, с които разполагаме?

4. Каква е ролята на законите на логиката (ще се спрем само на правилото за образуване на отрицания, за което говорихме по-рано)?

Преминаваме към доказателството.

Имаме да докажем, че функцията $f(x)$ е ограничена. Това значи, че съществува такова число K, че неравенството

$$(13) \qquad |f(x)| \leqq K$$

да бъде изпълнено при всяко x от M (тук използувахме *дефиницията* на понятието „ограничена функция“). Да допуснем противното, т. е. че функцията $f(x)$ не е ограничена. Това значи, че при всеки избор на числото K съществува поне една точка x от M, за която неравенството (13) е нарушено (тук приложихме правилото за образуване на отрицания). По такъв начин има поне една точка x, за която е изпълнено неравенството $|f(x)|>K$ (приложихме една позната теорема за неравенства). Да припомним че числото K може да се избира произволно. Ще се възползуваме от тази свобода, като дадем на K цяла положителна стойност n. Съгласно това, което установихме, има точка x_n от M, за която е изпълнено неравенството $|f(x_n)|>n$. Да разгледаме редицата

(14) $\qquad x_1, x_2, x_3, \ldots$

Членовете на тази редица принадлежат на M, а множеството M е компактно и следователно ограничено, както това се вижда от *дефиницията* на понятието „компактно множество" (вж. с. 138 (148) от учебника по диференциално смятане)*. Тук използуваме, макар и непълно, предположението за компактност на M. От това следва, че редицата (14) е ограничена (тук се използуват дефиницията на понятието „ограничено множество от числа" и свойства на неравенствата, макар че не развиваме подробно това елементарно място от доказателството). По такъв начин добиваме възможност да изберем от редицата (14) сходяща подредица (тук използуваме една доказана теорема, която понякога се нарича „принцип за компактност", вж. с. 65 (71) от учебника по диференциално смятане), т. е. да изберем редица

(15) $\qquad x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_n}, \ldots,$

за която

$$m_1<m_2<\ldots<m_n<\ldots$$

(тук използуваме дефиницията на понятието „подредица"). Съгласно едно познато свойство (вж. зад. 14 на с. 42 (46) от учебника по диференциално смятане) имаме $m_n \geqq n$.

Да означим с x_0 границата на редицата (15). Множеството M обаче е компактно и следователно точката x_0 принадлежи на M (използуваме предположението, че множеството M е компактно, и прилагаме дефиницията на понятието „компактно множество", вж. с. 138 (148) от учебника по диференциално смятане). От друга

---

* Авторът е използувал и препраща към изданието на учебника от 1962 г. В скоби са посочени съответните страници в последното му издание от 1978 г.— *Бел. ред.*

страна, функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и следователно редицата от функционалните стойности

$$(16) \qquad f(x_{m_1}),\ f(x_{m_2}),\ \ldots$$

е сходяща (използуваме предположението, че функцията $f(x)$ е непрекъсната, и прилагаме дефиницията на понятието непрекъснатост, вж. с. 131 и 132 (141 и 142) от учебника по диференциално смятане). Обаче

$$|f(x_{m_n})| > m_n \geq n$$

и следователно редицата (16) не е ограничена, което не е възможно, защото редицата (16) е сходяща и следователно е ограничена (вж. с. 46 (67) от учебника по диференциално смятане). С това стигнахме до исканото противоречие и завършихме доказателството.

Читателят трябва да се стреми към възможно по-голяма самостоятелност при доказателството на теоремите. В много случаи той ще може съвсем самостоятелно да извърши доказателството или част от доказателството, като замести едно или друго производно понятие с неговата дефиниция.

Изучаването на едно доказателство е сложен логически и психологически процес. По никакъв начин не е достатъчно само да се чете. Необходимо е с молив и хартия да се възпроизвежда доказателството. Възпроизвеждането трябва да става съзнателно и по възможност по-самостоятелно. Пресмятанията трябва да се извършват, а не да се приемат наготово. Курсът трябва да се чете последователно. При първо четене е целесъобразно да се изоставят само онези параграфи, за които това изрично е казано под линия. Ако се прескачат други параграфи, създават се празноти, които стават причина да не се разбира това, което се чете. Едновременно с изучаването на теорията трябва да се решават много задачи.

VI. ОТНОСНО РОЛЯТА НА ЗАДАЧИТЕ

Необходимите сръчности могат да се придобият само по пътя на решаването на достатъчен брой задачи. Същевременно задачите помагат да се разбере теорията. Някои от задачите трябва да се решават по няколко пъти. Това се отнася както за поважните интеграли, така и за по-особените задачи от всичките части на курса. При повторното решение на една по-особена задача, когато е налице предварителен поглед върху метода, задачата ни се явява в друга светлина. Едва тогава могат правилно да се преценят съществените моменти в постановката и решението на задачата.

Има два вида задачи. Към единия вид се отнасят задачи, които са предназначени да изяснят как се прилагат общите методи на теорията и да създадат техническа сръчност. Те не изискват особена съобразителност, но въпреки това тяхното значение е много голямо.

Задачите от втория вид са предназначени да разширят кръгозора на читателя и да допълнят теорията. Тези задачи не са тривиални. В учебника по диференциално и интегрално смятане те са снабдени с необходимите упътвания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящото указание засяга значителен материал. Читател, който още не е започнал да работи върху учебника, ще добие само повърхностна представа за смисъла на това указание, а голяма част от указанието въобще ще остане неразбрана. Въпреки това едно такова предварително запознаване е необходимо. Истинска полза ще се извлече обаче, когато в процеса на работата с учебника читателят според нуждата се връща към това указание. Примерите трябва грижливо да се проучат.

Разпределението на материала за лекциите и упражненията през време на присъствените занятия е дадено в програмата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тагамлицки, Я. Диференциално смятане. С., 1962.
2. Тагамлицки, Я. Интегрално смятане. С., 1963.
3. Като сборници от задачи могат да се използуват учебниците, които са цитирани по-горе, и сборниците от Г. Брадистилов или кой да е от сборниците по висша математика за ВУЗ, които се използуват в СССР, например сборниците от Н. Гюнтер и Р. Кузмин, Демидович и пр.