дите — светлост, цвят и др., с оглед на изучаване физическите им свойства.

Няколко прости уреди за ориентиране (слънчеви часовници и уреди за определяне посоката на меридиана) или дори елементарни ъгломерни инструменти могат да бъдат направени от по-добрите ученици и да бъдат от голяма полза за някои практически наблюдения при самото обучение.

Най-после при обучението и наблюденията нека се има предвид и следното: учениците могат да имат много слабо понятие (или дори да го нямат никакво) от твърде сложните фотометрични и спектроскопични методи на изследване, но винаги представлява необикновенно голям интерес да се покаже някоя определена звезда и да се изтъкне, че за нея ние познаваме доста точно разстоянието ѝ до нас, движението ѝ, температурата, диаметъра, масата, плътността и т. н., като се съобщат и тези данни. Тогава небесните тела престават да бъдат нещо отвлечено, а цялата Вселена добива своя реален физически смисъл, което е, както казахме вече, най-главната цел на обучението на астрономия.

ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ ЕЛЕМЕНТАРНАТА ТЕОРИЯ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ

от Д-р Я. Тагамлицки

Твърде често при разглеждането на сложната вероятност се дават примери от следния тип:*

В една урна R са поставени две съвършено еднакви урни R_1 и R_2. Урната R_1 съдържа 2 бели и 3 черни топки, а урната R_2 съдържа 1 бяла и 2 черни топки. Топките, ако се абстрахираме от обстоятелството, че не са от еднакъв цвят, са еднакви помежду си. Колко е голяма вероятността, че цветът на една извадена топка ще бъде бял?

Обикновено се предлага задачата да се реши по следния начин: вероятността за изваждането на една бяла топка от урната R_1 е $P_1 = \frac{1}{2}\frac{2}{2+3}$, като вероятност на сложното събитие, състоящо се от бръкването в урната R_1 (за което вероятността е $\frac{1}{2}$) и изваждането от R_1 на една бяла топка (за което вероятността е $\frac{2}{2+3}$). Аналогично разсъждаваме за урната R_2. И така търсената вероятност е

$$P = \frac{1}{2}\frac{2}{2+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+2} = \frac{11}{30}.$$

---

* Вж. J. B. J. Liagre, Calcul des probabilités (1879), второ, издание, стр. 48.

Обикновено*, обаче, теоремата за вероятностите на сложните събития се извежда чрез едно преброяване на благоприятните и всевъзможните случаи. Разбира се, както това преброяване се извършва в общия случай, така трябва да може да се извърши и в всеки специален случай, когато прилагаме общата теорема, т. е. когато са на лице всичките условия, при които е проведено доказателство на разглежданата теорема. Нека разгледаме вероятността P_1. Тук благоприятните случаи са 2, а всевъзможните са $2+3=5$. Защо сега получаваме $\frac{2}{5}$, което не съвпада с $\frac{1}{5}$? Отговорът на тоя въпрос е следния: в разглеждания пример не са спазени всичките условия, които се предполагат за изпълнени при доказателството на общата теорема и, следователно, без друго обосноване, решението, което цитирахме по-горе, не може да се счита за задоволително. За да изясним нашата мисъл нека припомним една част от това доказателство. Да означим с A и B две независими събития и с C събитието, което се заключава в едновременното настъпване на A и B. Нека $a_1, a_2, \ldots a_n$ и $b_1, b_2, \ldots b_m$ са всевъзможните случаи на събитията A и B. Тогава всевъзможните случаи на събитието C се заключават в едновременното сбъдване на събитията a_k и b_i, а те са nm на брой. Тук се иска, разбира се, всеки път, когато се сбъдне някое събитие a_k да може да настъпи всяко едно от събитията b_i. Така ли е в нашия случай? Нека a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, са случаите на изваждането на една топка от първата урна, а b_1 и b_2 са случаите на улучването респ. на R_1 и R_2. Тук, обаче, не всичките чифтове $a_k\, b_i$ са позволени напр. чифтът $a_1\, b_2$ е безсмислен. След като показахме, че посочената задача не спада към случаите, които се имат пред вид при доказателството на теоремата за сложните вероятности, ние искиме да дадем едно решение на тая задача.

Предварително нека припомним общата дефиниция на понятието вероятност при краен брой случаи

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots . \sigma_n$$

Нека на всеки случай σ_i съпоставим едно неотрицателно число (тегло) $Q(\sigma_i)$, така че

$$Q(\sigma_1)+Q(\sigma_2)+\cdots+Q(\sigma_n)=1$$

Да означим с $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_k$ благоприятните случаи на едно събитие S. Вероятността на S се дефинира с

$$P(S)=Q(\alpha_1)+Q(\alpha_2)+\cdots+Q(\alpha_k).$$

Понеже е ясно, че $P(\sigma_i)=Q(\sigma_i)$, в бъдаще няма да употребяваме символа Q, като го заместваме винаги с P.

* Вж. J. Liagre, Calcul des probabilités (1879) стр. 45.

И така във всяка задача, при която се търси вероятността на едно дадено събитие, трябва по един или друг начин да бъдат дадени благоприятните и всевъзможни случаи, и да бъде посочено, какво тегло се дава на всеки отделен случай (когато е казано, че случаите са равновероятни, т. е., че имат едно и също тегло, имаме

$$P(S)=\frac{k}{n},$$

където k е броят на благоприятните, а n е броят на всевъзможните случаи).

Сега сме готови да пристъпим към решението на поставената задача. Нека означим с a_1, a_2 случаите. които се заключават в изваждането на белите топки от R_1, с a_3, a_4, a_5 съответните случаи за черните топки от R_1, с b_1 случая за бялата топка от R_2 и найсетне с b_2, b_3 — за черните топки от R_2. В задачата е казано, че топките (като се абстрахираме от цвета им) са еднакви. Това трябва да се разбира така: топките от една урна са равновероятни, т. е.

$$P(a_1)=P(a_2)=P(a_3)=P(a_4)$$
$$P(b_1)=P(b_2)=P(b_3).$$

От друга страна е казано, че урните R_1 и R_2 са напълно еднакви. Това трябва да се разбира така:

$$P(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=P(b_1+b_2+b_3),$$

т. е.
$$5\,P(a_1)=3\,P(b_1)$$

и, понеже
$$5\,P(a_1)+3\,P(b_1)=1,$$

то
$$P(a_1)=\frac{1}{2.5} \text{ и } P(b_1)=\frac{1}{2\,3}$$

За вероятността, която ни интересува, намираме:

$$P(a_1+a_2+b_1)=P(a_1)+P(a_2)+P(b_1)=\frac{1}{2.5}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{2.3}=\frac{11}{30}$$

ЗА ГРАНИЦИТЕ НА ДРОБНИТЕ РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

от Д-р Т. Атанасов

В настоящата бележка ще препоръчаме един начин за по-лесно намиране границите на рационални функции, когато независимата променлива x клони към някое число $a \mp o$ или към ∞.

1. Ако независимата променлива x в една дробна рационална функция клони към числото $a \mp o$, полагаме $x = x_1 + a$ или заме-