на едното полукълбо виси блюдо, въ което се поставятъ теглилкитѣ. Непосрѣдствено до тѣзи опити въ единъ специаленъ стъкленъ шкафъ сѫ изложени оригиналнитѣ Магдебургски полукълба (заедно съ вѫжетата за впрѣгане конетѣ и пр), съ които Ото фонъ Герике е направилъ истсрическия опитъ съ тѣхъ въ 1657 год публично и въ присѫтствието на пруския краль. Диаметърътъ имъ е около 60 см. Не сѫ могли да бѫдатъ отдѣлени отъ 8 впрѣга коне.

Въ другъ шкафъ сѫ изложени много и различни помпи, които позволяватъ да се проследи тѣхното развитие. Единъ напрѣченъ разрѣзъ на една ротационна маслена помпа позволява лесно да се обясни действието ѝ. Изложени сѫ сѫщо така и последнитѣ модели на дифузионнитѣ помпи.

Опитътъ на Торичели е поставенъ въ другъ шкафъ. Дава се подробно описание за извършването му. Изложени сѫ много видове барометри, подредени споредъ тѣхното развитие. Сѫщо така сѫ показани различни видове манометри за измѣрване налѣгания по-голѣми отъ атмосферното, както и за такива подъ атмосферното—особено за части отъ милиметъра.

Показанъ е единъ ефектенъ опитъ на Магнусъ, който има практично приложение при въздухоплаването. Срещу една силна въздушна струя е поставена въ въздуха една лека топка, която, безъ да е подпрѣна, не пада, а се намира въ непрекѫснато въртеливо движение. Вследствие силната въздушна струя, въздухътъ надъ топката се разрѣжда, а отдолу сгѫстява, и по този начинъ се явява единъ натискъ отдолу нагоре, което не позволява на топката да падне. (Следва)

ВЪРХУ ТЕОРЕМАТА ЗА КРАЙНИТѢ НАРАСТВАНИЯ

отъ **Ярославъ Тагамлицки**

Класическата теорема отъ диференциалното смѣтане, известна подъ името „теорема за крайнитѣ нараствания“, се състои въ следното:

Нека $f(x)$ е една функция, непрекѫсната въ затворения интервалъ (a, b) и диференцуема поне въ всѣка вѫтрешна точка на сѫщия интервалъ. Въ такъвъ случай сѫществува поне една точка c въ вѫтрешностьта на (a, b) тъй, че

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c).$$

Естествено възниква обратниятъ въпросъ: нека $f(x)$ е диференцуема въ всѣка точка на интервала G; пита се, ако γ е отнапредъ дадена вжтрешна точка отъ G, винаги ли могатъ да се намѣрятъ въ G две числа, α и β, отъ различни страни на γ тъй, че

$$\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=f'(\gamma)$$

Отговорътъ на този въпросъ е изобщо отрицателенъ. Ако, напримѣръ, $f(x)=x^3$, то производната въ началото е нула; при все това изразътъ $\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$ не се анулира, дори ако премахнемъ ограничението α и β да сж отъ различни страни на началото. Сжщественото въ този примѣръ е, че началото е инфлексна*) точка за функцията.

Може, обаче, да се формулира следната теорема:

Ако $f(x)$ е диференцуема въ всѣка точка на околностьта G около точката γ и ако $f'(\gamma)$ не е нито най-голѣмата, нито най-малката измежду стойноститѣ на производната въ G, то сжществува поне една двойка различни точки α и β въ G тъй, че

$$\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=f'(\gamma).$$

И наистина, понеже $f'(\gamma)$ не е нито най-голѣмата, нито най-малката измежду стойноститѣ на $f'(x)$, има поне една двойка точки ξ_1 и ξ_2 въ вжтрешностьта на G тъй, че

$$f'(\xi_1)<f'(\gamma)<f'(\xi_2),$$

възъ основа на което винаги можемъ да си изберемъ h толкова малко, че

$$\frac{f(\xi_1+h)-f(\xi_1)}{h}<f'(\gamma)<\frac{f'(\xi_2+h)-f'(\xi_2)}{h}$$

и сжщевременно ξ_1+h и ξ_2+h да сж въ G. Но функцията

$$\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$$

на промѣнливото ξ е непрекжсната и, следователно, сжществува поне една точка ξ_0, която е между ξ_1 и ξ_2 (а следователно ξ_0 и ξ_0+h сж въ G), за която

---

*) Казваме, че въ една точка функцията има **инфлексия**, когато първата ѝ производна достига въ тази точка максимума или минимума си. Въ дефиницията не се предполага нищо, освенъ еднократна диференцуемость.

$$\frac{f(\xi_o + h) - f(\xi_o)}{h} = f'(\gamma).$$

Нека отбележа, че отъ доказателството не личи, че α и β (или, което е сжщото, $\xi_o + h$ и ξ_o) трѣбва да бждатъ отъ различни страни на γ. Единъ примѣръ ще ни убеди, че това не винаги е вѣрно. Нека

$$\begin{aligned} y &= x^2\left|\sin\frac{1}{x}\right| + x^2 && \text{за } x > 0, \\ y &= -x^2\left|\sin\frac{1}{x}\right| && \text{за } x < 0, \\ y &= 0 && \text{за } x = 0. \end{aligned}$$

Тукъ y е диференцуема навсѣкжде, и въ началото, която точка не е инфлексна, производната е нула; при все това изразътъ

$$\frac{\beta^2\left|\sin\frac{1}{\beta}\right| + \beta^2 + \alpha^2\left|\sin\frac{1}{\alpha}\right|}{\beta - \alpha}$$ не се анулира.

При допълнителни ограничения може, обаче, да се твърди, че α и β сж отъ различни страни на γ. Стига, напримѣръ, да предположимъ, че въ достатъчно малка околность на γ производната само веднажъ приема стойность $f'(\gamma)$.

Ще покажа едно друго свойство на функциитѣ, което има много простъ геометриченъ смисълъ. Този пжть нѣма да предполагамъ нищо друго, освенъ непрекжснатостьта на функцията.

Ако $f(x)$ е непрекжсната въ затворения интервалъ (a, b), то колкото и малко да бжде положителното число ε, винаги могатъ да се намѣрятъ поне две различни числа α и β въ вжтрешностьта на (a, b) така, че $|\alpha - \beta| < \varepsilon$ и

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}.$$

Ще докажемъ първо една лема:

Ако $\varphi(x)$ е непрекжсната въ затворения интервалъ (a, b) и ако $\varphi(a) = \varphi(b)$, то за всѣко положително число ε могатъ да се намѣрятъ поне две различни числа α и β въ вжтрешностьта на (a, b) тъй, че $|\alpha - \beta| < \varepsilon$ и $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.

И наистина, ако точната горна и долна граница съвпадатъ съ $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, то $\varphi(x)$ е константа и твърдението е очевидно. Въ противенъ случай ще докажемъ теоремата както следва: Нека, напримѣръ, точната горна граница е отлична отъ $\varphi(a) = \varphi(b)$; тогава въ вжтрешностьта на интервала (a, b) има поне една точка, за която $\varphi(x)$ достига точната си горна граница. Нека тази точка е x_0. Нека въ двата отворени интервала $\left(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0\right)$ и $\left(x_0, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ да вземемъ по една точка, които да означимъ респективно съ λ и μ. Ако $\varphi(\lambda) = \varphi(\mu)$, то твърдението е доказано; ако, напримѣръ, $\varphi(\lambda) > \varphi(\mu)$, то, тъй като $\varphi(x_0) \geqq \varphi(\lambda) > \varphi(\mu)$, сжществува между x_0 и μ поне една точка ν, за която $\varphi(\nu) = \varphi(\lambda)$.

Сега лесно ще докажемъ теоремата, формулирана по-горе. Очевидно функцията

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{a - x}{a - b}\Big[f(b) - f(a)\Big]$$

отговаря на всичкитѣ условия, които се изискватъ, за да бжде приложима доказаната лема; следователно, сжществува поне една двойка различни числа α и β отъ вжтрешностьта на (a, b) така, че $|\alpha - \beta| < \varepsilon$ и $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, т. е. следъ лесни преобразувания:

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}.$$

ЗА ИМАГИНЕРНАТА ЕДИНИЦА И НЕЙНИЯ КВАДРАТЪ

отъ Др. Върбановъ

Известно е, че квадратенъ коренъ отъ отрицателно число се нарича имагинерно, въображаемо, мнимо число. Споредъ Ойлера $\sqrt{-1}$ се означава съ i и се приема за имагинерна единица, при условие, че $i^2 = -1$. За разлика отъ имагинернитѣ числа, всички цѣли и дробни, рационални и ирационални, положителни и отрицателни числа, а така сжщо и нулата, се наричатъ реални, действителни числа.

Условностьта $i^2 = -1$ трѣбва да се даде още въ началото, при откриване на понятието имагинерно число, защото, ако това не стане, нѣкои отъ по-досѣтливитѣ ученици, ще извършатъ степенуването на i по два различни начина:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1;$$
$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = \pm 1;$$