$$\left| E_{p_k}\left(\frac{z}{a_k}\right) - 1 \right| < \left(\frac{R}{r_k}\right)^{p_k} \text{ и редътъ } \sum \left(\frac{R}{r_k}\right)^{p_k} \text{ е сходящъ.}$$

Забележка. Ако означимъ съ B_n броя на онѣзи членове на редицата (1), които сж $\leqq n$, то доказаната отъ насъ теорема може да се изрази още така:

За да бжде редицата (1) Вайерщрасова, необходимо и достатъчно е редицата

$$(4') \qquad B_1, \sqrt{B_2}, \sqrt[3]{B_3}, \ldots, \sqrt[n]{B_n}, \ldots$$

да е ограничена.

И наистина, отъ една страна, лесно се вижда, че $B_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$. Отъ друга страна, редицата (4) е ограничена тогава и само тогава, когато редътъ

$$f(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \cdots$$

има положителенъ радиусъ на сходимость. Но въ такъвъ случай и редътъ

$$(1 - z)^{-1} f(z) = B_1 z + B_2 z^2 + \cdots$$

има положителенъ радиусъ на сходимость, т. е. редицата (4') е сжщо ограничена. Обратно, отъ ограничеността на редицата (4') следва веднага сжщото и за редицата (4).

ЯРОСЛАВЪ ТАГАМЛИЦКИ

ЕДНО СВОЙСТВО НА СУМИРУЕМИТѢ ФУНКЦИИ ВЪ LEBESGUE'ОВЪ СМИСЪЛЪ

Нека редицата

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

отъ сумируеми функции въ измѣримия и ограниченъ ансамбълъ E да е сходяща и да клони къмъ сумируемата въ сжщия ансамбълъ функция $f(x)$.

Да означимъ съ e кой да е измѣримъ подансамбълъ на E.

Нека редицата

$$\int_e f_1(x)\,dx, \int_e f_2(x)\,dx, \ldots, \int_e f_n(x)\,dx, \ldots$$

да е сходяща и $J(e)$ да означава границата ѝ.

Ние ще докажемъ следната теорема:

Необходимото и достатъчно условие, за да сжществува равенството

$$\int_e f(x)\,dx = J(e),$$

е функцията $J(e)$ да бжде абсолютно непрекжсната, т. е. да клони къмъ нула заедно съ $\mathfrak{m} e$[1]).

---

[1]) $\mathfrak{m} e$ означава Льобеговата мѣрка на ансамбъла e.

Необходимостьта на условието е очевидна вследствие на абсолютната непрекжснатость на интеграла. Сега ние ще установимъ, че условието е и достатъчно. За тази цель нека съ e_k означимъ онзи подансамбълъ на e, въ който

$$|f_n(x)-f(x)|\leqq\varepsilon$$

за всѣко $n\geqq k$, при това за $k>1$

$$|f_{k-1}(k)-f(x)|>\varepsilon,$$

гдето ε означава едно отнапредъ избрано положително число. Очевидно ансамблитѣ e_k сж всичкитѣ измѣрими и нѣматъ обща точка. Отъ друга страна, като помнимъ, че $f_n(x)$ клони къмъ $f(x)$ и e_k сж подансамбли на e, то заключаваме, че $e=e_1+e_2+\ldots+e_k+\ldots$, а оттукъ:

$$\int_e f(x)\,dx-\int_e f_n(x)\,dx=\int_{e_1}\left[f(x)-f_n(x)\right]dx+\int_{e_2}\left[f(x)-f_n(x)\right]dx+\ldots$$

Следователно, за $n\geqq N$ имаме

$$\left|\int_e f(x)\,dx-\int_e f_n(x)\,dx\right|\leqq\varepsilon\,\mathrm{m}\,e+\left|\int_{e'}f(x)\,dx\right|+\left|\int_{e'}f_n(x)\,dx\right|,$$

гдето

$$e'=e_{N+1}+e_{N+2}+\ldots$$

Като оставимъ n да клони къмъ безкрайность (при постоянно N), намираме:

$$\left|\int_e f(x)\,dx-J(e)\right|\leqq\varepsilon\,\mathrm{m}\,e+\left|\int_{e'}f(x)\,dx\right|+|J(e')|.$$

Сега да оставимъ N да расте неограничено; тогава, като имаме предъ видъ, че $\mathrm{m}\,e'\to 0$, получаваме

$$\left|\int_e f(x)-J(e)\right|\leqq\varepsilon\,\mathrm{m}\,e,$$

отгдето следва веднага вѣрностьта на твърдението.

АЛЕКСАНДЪРЪ ИВАНОВЪ

ЕВОЛЮЦИЯ ВЪ ТЕОРИЯТА НА ВѢРОЯТНОСТИТѢ

Историята на математиката ни посочва голѣмитѣ придобивки, които последната е дала на човѣчеството, отъ появата си до днесъ. Нѣма область на човѣшкото знание, въ което тя да не е направила своя ценenъ приносъ. Изобщо математиката се е развивала успоредно съ човѣшкия прогресъ. Всички знаятъ, каква важна роля е играла геометрията въ живота на старитѣ египтяни. И днесъ ние виждаме, че механиката и техниката сж добили ръстъ, който поразява. Въ тая насока човѣшкиятъ гений проявява такава прозорливость, че поразява обикновения човѣкъ.

Въ началото на настоящето столѣтие математиката навлѣзе въ область, въ която доминира случайностьта и която се смѣташе недосегаема за разрешение отъ човѣшкия умъ. Въпрѣки това тя и тукъ даде насока за развитие на цѣла редица важни проблеми, които иматъ голѣма стойность въ практическия животъ.