Оттиск, стр. 308—309.

ТАГАМЛИЦКИЙ Я.

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОГО
СИМПОЗИЯ ПО ТОПОЛОГИИ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯХ

ХЕРЦЕГ - НОВИ (ЮГОСЛАВИЯ) 25—31. 8. 1968.

БЕОГРАД, 1969.

ТАГАМЛИЦКИЙ Я. (София, Булгария)

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Цель нашего сообщения обобщить понятие границы для индуктивных пространств.

Напомним сначала определение индуктивного пространства. Обозначим через M некоторое множество и через $\varphi(\gamma)$ функцию, определенную на некотором упорядоченом множестве Γ, значениями которой являются подмножества M. Функцию $\varphi(\gamma)$ будем называть разделяющей функцией, а множество M будем называть индуктивным пространством, если выполнены следующие условия 1, 2, 3:

1. Множество M компактно относительно системы функциональных значений $\varphi(\gamma)$.

2. Функция $\varphi(\gamma)$ монотонно возрастает, т. е. если $\gamma_1 \leqq \gamma_2$, то $\varphi(\gamma_1) \subset \varphi(\gamma_2)$.

3. Всякая направленная вправо система $\{\gamma_\nu\}$ элементов из Γ имеет верхнюю границу γ_0, удовлетворяющую условию

$$\sum_\nu \varphi(\gamma_\nu) = \varphi(\gamma_0).$$

В дальнейшем мы покажем примеры индуктивных пространств.

Две точки a и b из M будем называть *неотделимыми* и будем писать $a \approx b$, если каждое функциональное значение разделяющей функции либо содержит обе точки a и b, либо не содержит ни одной из них.

Точку a из M будем называть характеристической точкой компактного множества S из M, если

1. из $S \subset \varphi(\gamma)$ следует $a \in \varphi(\gamma)$;

2. если для некоторого $\gamma_1 \in \Gamma$ имеем $\varphi(\gamma_1) \cap S \neq 0$ и $\overline{\varphi(\gamma_1)} \cap S \neq 0$, то существует γ_2 из Γ удовлетворяющее условиям

$$\gamma_1 \leqq \gamma_2, \qquad a \in \varphi(\gamma_2), \qquad \overline{\varphi(\gamma_2)} \cap S \neq 0.$$

Множество характеристических точек S будем обозначать через (S).

Точку a из M будем называть *неразложимым элементом* M, если из $a \in (S)$ и $x \in S$ следует $a \approx x$.

Множество всех неразложимых элементов M будем называть индуктивной границей M.

Наименование „*индуктивное пространство*" оправдывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Если $\varphi(\gamma_0)$ для какого-нибудь γ_0 из Γ покрывает индуктивную границу M, то $\varphi(\gamma_0)$ покрывает все множество M.*

Теорема эта является обобщением обычной индукции.

В качестве более интересного примера рассмотрим компактное множество M_1 в линейном пространстве R с локально выпуклой топологией. Через Γ_1 обозначим множество всех выпуклых открытых множеств γ пространства R; будем писать $\gamma_1 \leqq \gamma_2$, если $\gamma_1 \subset \gamma_2$ и положим $\varphi(\gamma) = \gamma \cap M_1$. В таком случае неразложимые элементы M_1 будут крайними точками в смысле Минковского (обратное в общем случае не верно) и следовательно в этом случае индуктивная граница может не совпадать с обычной топологической границей. Теорема 1 нам дает теорему Крейна и Мильмана.

Теорема 2. Для того чтобы любую непрерывную функцию определенную на индуктивной границы M_1 и принимающую значения в полной выпуклой части линейного пространства с локально выпуклой топологией можно было продолжить в M_1 как непрерывную и аффинную функцию, необходимо и достаточно существование множества аффинных непрерывных вещественных функционалов $f(x)$ в M_1, разделяющих точки индуктивной границы M_1, для которых $xf(x)$ допускают непрерывное и аффинное продолжение в M_1.

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда индуктивная граница совпадает с обычной топологической границей. Для этой цели обозначим через Γ_2 множество открытых множеств из R (мы сохраняем наши обозначения), которые содержат каждое компактное множество, если только они содержат его обычную топологическую границу. В этом случае, как и раньше пологаем $\varphi(\gamma) = \gamma \cap M_1$, $\gamma \in \Gamma_2$ упорядочив Γ_2, как Γ_1, по включению. При таком выборе разделяющей функции индуктивная граница M_1 совпадает с ее обычной топологической границей.

Printed in Yugoslavia
Beogradski grafički zavod,
Vojvode Mišića 17
Beograd