БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

Я. Тагамлицки

Върху някои интерполационни развития на регулярно-монотонните функции

ОТДЕЛЕН ОТПЕЧАТЪК ОТ ИЗВЕСТИЯ
НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
ТОМ III, КН. 2

СОФИЯ — 1959

ВЪРХУ НЯКОИ ИНТЕРПОЛАЦИОННИ РАЗВИТИЯ НА РЕГУЛЯРНО-МОНОТОННИТЕ ФУНКЦИИ

Я. Тагамлицки

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и безбройно много пъти диференцуема в затворения интервал $0 \leqq x \leqq 1$. Такава функция според терминологията на С. Н. Бернщейн [1] се нарича регулярно-монотонна, ако

$$\varepsilon_n f^{(n)}(x) \geqq 0 \tag{1}$$

при $0 \leqq x \leqq 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, където

$$\varepsilon_n = \pm 1. \tag{2}$$

Константите ε_n не зависят от x, но могат да се менят заедно с n.)

В редица свои работи С. Н. Бернщейн [2, 3, 4] е изследвал свойствата на регулярно-монотонните функции. По-специално в случаите

$$\varepsilon_n = 1, \quad \varepsilon_n = (-1)^n, \quad \varepsilon_n = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}, \quad \varepsilon_n = (-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$$

той е намерил забележителни развития на тези функции. Нашият студент и кръжочник Бл. Сендов [5] даде едно хубаво обобщение на тези резултати на С. Н. Бернщейн, като намери съответните развития в случая, когато $\{\varepsilon_n\}$ е произволна периодична редица, подчинена на условието (2). Този резултат той получи с помощта на методи, спадащи към функционалния анализ. В работата си [6] Бл. Сендов обобщава тези резултати, като намалява още повече предположенията за редицата $\{\varepsilon_n\}$ и използува средствата на обичайния анализ.

От друга страна отдавна е известно, че при произволен избор на константите ε_n, удовлетворяващи условието (2), съществуват функции, които не се анулират тъждествено и които удовлетворяват условието (1). Такива са например полиномите на Абел-Гончаров [7], дефинирани с условията.

$$P_0(x) = \varepsilon_0$$

$$P_n(x) = \varepsilon_0 \int_{x_0}^{x} \tau_0\, dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1\, dt_2 \ldots \int_{x_{n-1}}^{t_{n-1}} \tau_{n-1}\, dt_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

където

$$x_k = \frac{1-\varepsilon_k\,\varepsilon_{k+1}}{2}, \quad \tau_k = 1-2x_k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

и следователно

$$\tau_k = \varepsilon_k\,\varepsilon_{k+1} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

За да покажем, че полиномите $P_n(x)$ наистина удовлетворяват условията (1), достатъчно е да вземем под внимание, че ако интегруемата функция $\varphi(t)$ е неотрицателна и $0 \leqq x \leqq 1$, то

$$\int_{x_k}^{x} \tau_k \varphi(t)dt \geqq 0,$$

нещо, което е очевидно*. В тази връзка естествено възниква въпросът за общо представяне на регулярно-монотонните функции, за които константите ε_n са дадени произволно и не са подчинени на никое друго условие освен условието (2). С тази задача ние ще се занимаваме в настоящата работа. Ние ще вървим обаче по един път, различен както от пътя на С. Н. Бернштейн, така и на Бл. Сендов

* * *

Нека редицата $\{\varepsilon_n\}$ е дадена, където $\varepsilon_n = \pm 1$. Ще означим с K множеството на съответните регулярно-монотонни функции, т. е. на онези безбройно много пъти диференцуеми при $0 \leqq x \leqq 1$ функции, които удовлетворяват условията (1). Нека $f(x)\,\varepsilon K$. Както е известно и както се проверява непосредствено, имаме

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu) P_\nu(x) + R_n(x), \tag{3}$$

където

$$R_n(x) = \varepsilon_0 \int_{x_0}^{x} \tau_0\, dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1\, dt_2 \ldots \int_{x_n}^{t_n} \tau_n \varepsilon_{n+1} f^{(n+1)}(t)dt. \tag{4}$$

Полезно е да отбележим, че

$$P_n(x)\,\varepsilon K \text{ и } R_n(x)\,\varepsilon K, \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

По-специално имаме

$$\varepsilon_0 P_n(x) \geqq 0 \text{ и } \varepsilon_0 R_n(x) \geqq 0, \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Оттук следва, че при всички цели положителни стойности на n имаме

$$\varepsilon_0 f(x) \geqq \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu)\, \varepsilon_0 P_\nu(x)$$

и следователно редът

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu)\, \varepsilon_0\, P_\nu(x),$$

* В настоящата работа ние често ще се ползуваме от тази бележка

чиито членове са неотрицателни, е сходящ. От това пък следва, че съществува границата

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

и е валидно равенството

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu)P_\nu(x)+\varphi(x). \tag{5}$$

Функцията $\varphi(x)$, както лесно се проверява, удовлетворява условията

$$\varphi^{(k)}(x_k)=0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{6}$$

и принадлежи на K. За да се убедим в това, достатъчно е да използуваме тъждеството

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu)P_\nu(x)+R_n(x),$$

от което се вижда, че при $k\leq n$

$$R_n^{(k)}(x)=-\sum_{\nu=k}^{n}\varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu)P_\nu^{(k)}(x)+f^{(k)}(x).$$

И наистина редът

$$\sum_{\nu=k}^{\infty}\varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu)\,\varepsilon_k P_\nu^{(k)}(x)$$

е равномерно сходящ, защото се мажорира от сходящия ред

$$\sum_{\nu=k}^{\infty}\varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu)\varepsilon_k P_\nu^{(k)}(1-x_k),$$

членовете на който не зависят от x. Това обстоятелство ни позволява да твърдим, че всяка една от редиците

$$R_k^{(k)}(x),\ R_{k+1}^{(k)}(x),\ \ldots \qquad (k=0,\ 1,\ 2\ \ldots)$$

е равномерно сходяща при $0\leqq x\leqq 1$ и следователно функцията $\varphi(x)$ е безбройно много пъти диференцуема и

$$\varphi^{(k)}(x)=\lim_{n\to\infty} R_n^{(k)}(x).$$

От това вече се вижда непосредствено, че функцията $\varphi(x)$ принадлежи на K и удовлетворява условията (6).

Ние ще изучим, първо, случая, когато при безбройно много стойности на ν имаме $x_\nu=0$. За тази цел разглеждаме функцията $\varphi(ux)$, където $0\leqq u<1$. Очевидно при фиксирано u функцията $\varphi(ux)$ принадлежи на K. Формулата (3) ни дава

$$\varphi(ux)=\sum_{\nu=0}^{n}\varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(ux_\nu)\,P_\nu(x)+S_n(x),$$

където

$$S_n(x)=\varepsilon_0 u^{n+1}\int_{x_0}^{x}\tau_0\,dt_1\int_{x_1}^{t_1}\tau_1 dt_2\ldots\int_{x_n}^{t_n}\tau_n\varepsilon_{n+1}\varphi^{(n+1)}(ut)\,dt.$$

Полагаме

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x).$$

В такъв случай

$$\varphi(ux)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu u^\nu\varphi^{(\nu)}(ux_\nu)\,P_\nu(x)+S(x).$$

Нека имаме $x_{n+1}=0$. Тогава $\varepsilon_{n+1}\,\varepsilon_{n+2}=1$ и следователно

$$\varepsilon_{n+1}\varphi^{(n+1)}(t)-\varepsilon_{n+1}\varphi^{(n+1)}(ut)=$$
$$=\varepsilon_{n+2}t(1-u)\varphi^{(n+2)}(\xi)\geqq 0,$$

където

$$ut<\xi<t.$$

По такъв начин получаваме

$$\varepsilon_{n+1}\varphi^{(n+1)}(ut)\leqq\varepsilon_{n+1}\varphi^{(n+1)}(t).$$

Оттук намираме

$$\varepsilon_0 S_n(x)\leqq u^{n+1}\int_{x_0}^{x}\tau_0\,dt_1\ldots\int_{x_n}^{t_n}\tau_n\,\varepsilon_{n+1}\,\varphi^{(n+1)}(t)dt=u^{n+1}\varepsilon_0\varphi(x)$$

и следователно

$$\varepsilon_0\,S(x)\leqq u^{n+1}\,\varepsilon_0\,\varphi(x).$$

Като вземем под внимание, че $\varepsilon_0\,S(x)\geqq 0$, и като оставим n да расте неограничено, получаваме $S(x)=0$. И така, ако при безбройно много цели положителни стойности на ν имаме $x_\nu=0$, то

$$\varphi(ux)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu\,u^\nu\varphi^{(\nu)}(ux_\nu)\,P_\nu(x) \tag{7}$$

при $0\leqq x\leqq 1$ и $0\leqq u<1$.

Ако при всички достатъчно големи цели стойности на n имаме $x_n=0$, то случаят е тривиален, защото при такива стойности на n ще имаме

$$\varphi^{(n)}(ux_n)=\varphi^{(n)}(0)=\varphi^{(n)}(x_n)=0$$

и следователно дясната страна на равенството (7) се редуцира на крайна сума. Достатъчно е в този случай да оставим u да клони към единица, за да получим

$$\varphi(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu\varphi^{(\nu)}(x_\nu)P_\nu(x)=0$$

и следователно развитието (6) ще добие вида

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu\,f^{(\nu)}(x_\nu)\,P_\nu(x). \tag{8}$$

По този начин ние можахме да развием функцията $f(x)$ в ред по полиномите на Абел-Гончаров, щом за всички достатъчно големи цели стойности на n имаме $x_n=0$.

Повече грижи изисква случаят, когато при безбройно много стойности на ν имаме $x_\nu=1$. За да можем да изучим този случай, ние ще определим знака на израза

$$\frac{d}{dx}\frac{P_n(x)}{P_m(x)}, \tag{9}$$

където $n>m\geqq 0$, $0<x<1$. За тази цел, когато $m>0$, избираме цяло неотрицателно число k, по-малко от m. В такъв случай

$$\frac{d}{dx}\frac{P_n^{(k)}(x)}{P_m^{(k)}(x)}=$$

$$=\frac{P_m^{(k+1)}(x)}{P_m^{(k)}(x)}\left[\frac{P_n^{(k+1)}(x)}{P_m^{(k+1)}(x)}-\frac{P_n^{(k)}(x)}{P_m^{(k)}(x)}\right]=$$

$$=\frac{P_m^{(k+1)}(x)}{P_m^{(k)}(x)}\left[\frac{P_n^{(k+1)}(x)}{P_m^{(k+1)}(x)}-\frac{P_n^{(k)}(x)-P_n^{(k)}(x_k)}{P_m^{(k)}(x)-P_m^{(k)}(x_k)}\right]=$$

$$=\frac{P_m^{(k+1)}(x)}{P_m^{(k)}(x)}\left[\frac{P_n^{(k+1)}(x)}{P_m^{(k+1)}(x)}-\frac{P_n^{(k+1)}(\xi)}{P_m^{(k+1)}(\xi)}\right],$$

където ξ е точка между x и x_k. По такъв начин ние получаваме

$$\frac{d}{dx}\frac{P_n^{(k)}(x)}{P_m^{(k)}(x)}=\tau_k(x-\xi)\cdot\frac{\tau_k P_m^{(k+1)}(x)}{P_m^{(k)}(x)}\,\psi'(\eta), \tag{10}$$

където

$$\psi(x)=\frac{P_n^{(k+1)}(x)}{P_m^{(k+1)}(x)}$$

и η е подходящо избрано число между x и ξ.

От друга страна имаме

$$\tau_k(x-\xi)>0,\ \frac{\tau_k P_m^{(k+1)}(x)}{P_m^{(k)}(x)}>0$$

и следователно изразите

$$\frac{d}{dx}\frac{P_n^{(k)}(x)}{P_m^{(k)}(x)}\ \text{и}\ \psi'(\eta)$$

имат един и същ знак. По този начин въпросът за определяне на знака на (10) се свежда към въпроса за определяне на знака на

$$\frac{d}{dx}\frac{P_n^{(k+1)}(x)}{P_m^{(k+1)}(x)}.$$

От друга страна изразът

$$\frac{d}{dx}\frac{P_n^{(m)}(x)}{P_m^{(m)}(x)}=\varepsilon_m P_n^{(m+1)}(x)$$

не си мени знака и неговият знак съвпада със знака на τ_m, дори при $m=0$. По такъв начин ние определихме знака на

$$\frac{d}{dx}\frac{P_n^{(k)}(x)}{P_m^{(k)}(x)} \tag{11}$$

при $n>m\geqq k\geqq 0$. Оттук въз основа на това, което получихме погоре, е ясно, че знакът на (11) съвпада със знака на τ_m при всички цели неотрицателни стойности на k, които не надминават m. По-специално, като дадем на k стойност нула, заключаваме, че (9) има знака на τ_m при $n>m\geqq 0$ и $0<x<1$.

След тези спомагателни разглеждания вече сме готови да преминем към случая, когато при безбройно много стойности на ν имаме $\tau_\nu=1$. Нека

$$n_1<n_2<n_3<\ldots$$

е редицата от всичките цели неотрицателни числа, за които $x_{n_k}=1$. В такъв случай дробта

$$\frac{P_{n_{k+1}}(x)}{P_{n_k}(x)}$$

монотонно намалява при $0\leqq x\leqq 1$, защото знакът на производната

$$\frac{d}{dx}\frac{P_{n_{k+1}}(x)}{P_{n_k}(x)}$$

съвпада със знака на $\tau_{n_k}=-1$. От друга страна имаме

$$\varepsilon_0 P_n(1-x_0)>0$$

и ние можем да образуваме отношението

$$\frac{P_{n_{k+1}}(1-x_0)}{P_{n_k}(1-x_0)}.$$

По такъв начин получаваме

$$\frac{P_{n_{k+1}}(x)}{P_{n_k}(x)}\geqq\frac{P_{n_{k+1}}(1-x_0)}{P_{n_k}(1-x_0)} \tag{12}$$

при $x_0=0$ и

$$\frac{P_{n_{k+1}}(x)}{P_{n_k}(x)}\leqq\frac{P_{n_{k+1}}(1-x_0)}{P_{n_k}(1-x_0)} \tag{13}$$

при $x_0=1$, т. е. и в двата случая имаме

$$\tau_0\left[\frac{P_{n_{k+1}}(x)}{P_{n_{k+1}}(1-x_0)}-\frac{P_{n_k}(x)}{P_{n_k}(1-x_0)}\right]\geqq 0. \tag{14}$$

И така редицата от неотрицателните и не надминаващите единица функции

$$\frac{P_{n_1}(x)}{P_{n_1}(1-x_0)}, \quad \frac{P_{n_2}(x)}{P_{n_2}(1-x_0)}, \ldots \tag{15}$$

е монотонна (растяща или намаляваща в зависимост от това, дали имаме $x_0=0$ или $x_0=1$) и следователно е сходяща. Ние ще означим с $\varepsilon_0 P(x)$ нейната граница.

Фиксираме x от затворения интервал $[0, 1]$. Избираме едно произволно положително число ε и определяме m толкова голямо, че да имаме

$$\left| \frac{P_{n_k}(x)}{P_{n_k}(1-x_0)} - \varepsilon_0 P(x) \right| < \varepsilon \tag{16}$$

при $k > m$. В такъв случай при $\nu > n_m$ имаме

$$\begin{aligned} &|\varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(ux_\nu) P_\nu(x) - \varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(ux_\nu) P_\nu(1-x_0)\varepsilon_0 P(x)| \leqq \\ &\qquad \leqq \varepsilon\varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(ux_\nu)\,\varepsilon_0 P_\nu(1-x_0). \end{aligned} \tag{17}$$

И наистина при $x_\nu = 1$ това неравенство следва от (16), а при $x_\nu = 0$ имаме

$$\varphi^{(\nu)}(ux_\nu) = 0.$$

Да разгледаме

$$\begin{aligned} &\varphi(ux) - \varepsilon_0 P(x)\,\varphi(1-x_0) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(ux_\nu) P_\nu(x) - \varepsilon_0 P(x) \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(ux_\nu) P_\nu(1-x_0) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{n_m} \varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(ux_\nu) P_\nu(x) - \varepsilon_0 P(x) \sum_{\nu=0}^{n_m} \varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(ux_\nu) P_\nu(1-x_0) + \\ &+ \sum_{\nu=n_m+1}^{\infty} \left[\varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(ux_\nu) P_\nu(x) - \varepsilon_0 P(x) \varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(ux_\nu) P_\nu(1-x_0)\right] \end{aligned}$$

Оттук получаваме с помощта на (17) неравенството

$$\begin{aligned} &|\varphi(ux) - \varepsilon_0 P(x)\,\varphi(1-x_0)| \leqq \\ &\leqq \sum_{\nu=0}^{n_m} \varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(ux_\nu)\,|P_\nu(x)| + \varepsilon_0 P(x) \sum_{\nu=0}^{n_m} \varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(ux_\nu)\,|P_\nu(1-x_0)| + \\ &\qquad + \varepsilon \sum_{\nu=n_m}^{\infty} \varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(ux_\nu)\,\varepsilon_0 P_\nu(1-x_0) \leqq \\ &\leqq \sum_{\nu=0}^{n_m} \varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(ux_\nu)\,|P_\nu(x)| + \varepsilon_0 P(x) \sum_{\nu=0}^{n_m} \varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(ux_\nu)\,|P_\nu(1-x_0)| + \varepsilon\varepsilon_0 \varphi(ux), \end{aligned}$$

откъдето, като оставим u да клони към единица, намираме

$$|\varphi(x)-\varepsilon_0 P(x)\varphi(1-x_0)| \leqq \varepsilon\varepsilon_0 \varphi(x)$$

и следователно

$$\varphi(x)=\varepsilon_0\varphi(1-x_0)\, P(x).$$

Оттук можем да заключим, че ако $\varphi(1-x_0) \neq 0$, то функцията $P(x)$ е безбройно много пъти диференцуема при $0 \leqq x \leqq 1$ и принадлежи на K. Ако ли пък $\varphi(1-x_0)=0$, то $\varphi(x)=0$.

По такъв начин развитието (5) добива вида

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu) P_\nu(x)+AP(x), \tag{18}$$

където A е неотрицателна константа, а функцията $P(x)$ не зависи от $f(x)$, принадлежи на K и удовлетворява условията

$$P^{(k)}(x_k)=0, \qquad (k=0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{19}$$

Случаят, когато имаме само краен брой стойности на ν, за които $x_\nu=0$ е прост, защото в такъв случай при всички достатъчно големи цели стойности на ν имаме $x_\nu=1$. В този случай разглеждаме функцията $\varphi(1-u+ux)$, където $0 \leqq u < 1$. За нея имаме

$$\varphi(1-u+ux)=\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu u^\nu \varphi^{(\nu)}(1-u+ux_\nu)P_\nu(x).$$

Това се доказва по същия начин, както ние доказахме (7). В този случай обаче безкрайният ред се редуцира на крайна сума и следователно, като оставим u да клони към единица, ще получим

$$\varphi(x)=0,$$

т. е.

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu)P_\nu(x). \tag{20}$$

С това е показано, че развитието (18) е валидно и в този случай, като при това $AP(x)$ се анулира тъждествено.

От разсъжденията, които направихме, се вижда, че ако за всички достатъчно големи цели стойности на ν имаме или само $x_\nu=0$, или само $x_\nu=1$, то развитието (18) приема вида (20) и следователно ако в този случай имаме

$$f^{(k)}(x_k)=0, \qquad (k=0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

то $f(x)$ се анулира тъждествено. Във връзка с това ще покажем, че във всички останали случаи съществува функция $P(x)$, която принадлежи на K, удовлетворява условията

$$P^{(k)}(x_k)=0, \qquad (k=0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

но не се анулира тъждествено. За тази цел ще разгледаме редицата

$$\varepsilon_0 \frac{P_{n_1}(x)}{P_{n_1}(1-x_0)},\ \varepsilon_0 \frac{P_{n_2}(x)}{P_{n_2}(1-x_0)}, \ldots,$$

където
$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$
е редицата на онези цели положителни стойности на ν, за които $x_\nu = 1$, и ще означим с $P(x)$ нейната граница. Да положим за краткост
$$g_i(x) = \varepsilon_0 \frac{P_{n_i}(x)}{P_{n_i}(1-x_0)}.$$
В такъв случай $g_i(x) \in K$.

Да изберем три различни точки ξ_1, ξ_2, ξ_3 между нула и единица. В такъв случай имаме
$$\frac{g_i(\xi_1)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)} + \frac{g_i(\xi_2)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} + \frac{g_i(\xi_3)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)} = \frac{g_i''(\xi)}{2!},$$
където ξ е подходящо избрано число от интервала (0, 1). Оттук заключаваме, че
$$\varepsilon_2 \left[\frac{g_i(\xi_1)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)} + \frac{g_i(\xi_2)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} + \frac{g_i(\xi_3)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)}\right] \geqq 0,$$
което след граничен преход ни дава
$$\varepsilon_2 \left[\frac{P(\xi_1)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)} + \frac{P(\xi_2)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} + \frac{P(\xi_3)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)}\right] \geqq 0.$$
И така функцията $\varepsilon_2 P(x)$ е изпъкнала и следователно функцията $P(x)$ е непрекъсната във всички в ъ т р е ш н и точки на интервала (0, 1).

Преминаваме към изследване на точките $x=0$ и $x=1$.

Нека m е едно такова цяло положително число, за което $x_m = 0$, т. е. $\tau_m = 1$. Такива числа по предположение има (дори безбройно много). Да разгледаме отношението
$$\frac{P_{n_i}(x)}{P_m(x)}$$
при $n_i > m$. Това отношение, както вече видяхме по-горе, монотонно расте при $0 \leqq x \leqq 1$, защото $\tau_m = 1$. Оттук заключаваме, че ако $x_0 = 0$, то
$$\frac{P_{n_i}(x)}{P_m(x)} \leqq \frac{P_{n_i}(1)}{P_m(1)},$$
а ако $x_0 = 1$, то
$$\frac{P_{n_i}(x)}{P_m(x)} \geqq \frac{P_{n_i}(0)}{P_m(0)},$$
т. е. и в двата случая имаме
$$\tau_0 \left[\frac{P_m(x)}{P_m(1-x_0)} - \frac{P_{n_i}(x)}{P_{n_i}(1-x_0)}\right] \geqq 0.$$
Оттук, о с т а в я й к и i да расте неограничено, получаваме

$$\tau_0 \frac{P_m(x)}{P_m(1-x_0)} \geqq \varepsilon_1 P(x). \tag{21}$$

От друга страна неравенството (14) ни учи, че редицата

$$\tau_0 \frac{P_{n_1}(x)}{P_{n_1}(1-x_0)}, \tau_0 \frac{P_{n_2}(x)}{P_{n_2}(1-x_0)}, \ldots \tag{22}$$

монотонно расте и следователно при всяко цяло положително i имаме

$$\varepsilon_1 P(x) \geqq \tau_0 \frac{P_{n_i}(x)}{P_{n_i}(1-x_0)}. \tag{23}$$

Сега вече сме готови да покажем, че функцията $P(x)$ е непрекъсната както при $x=0$, така и при $x=1$. Нека ξ е или 0, или 1. Избираме едно положително число ε. В такъв случай може да се избере $\delta > 0$ по такъв начин, че при $|x-\xi| < \delta$ да имаме

$$\frac{\tau_0 P_m(x)}{P_m(1-x_0)} - \frac{\tau_0 P_m(\xi)}{P_m(1-x_0)} < \varepsilon. \tag{24}$$

$$\frac{\tau_0 P_{n_i}(\xi)}{P_{n_i}(1-x_0)} - \frac{\tau_0 P_{n_i}(x)}{P_{n_i}(1-x_0)} < \varepsilon. \tag{25}$$

Тук i е фиксирано.

От друга страна имаме

$$\frac{\tau_0 P_m(\xi)}{P_{n_i}(1-x_0)} = \frac{\tau_0 P_{n_i}(\xi)}{P_{n_i}(1-x_0)} = \varepsilon_1 P(\xi)$$

и следователно, като използуваме неравенствата (21) и (23), ще получим от (24) и (25)

$$\varepsilon_1 P(x) - \varepsilon_1 P(\xi) < \varepsilon,$$

$$\varepsilon_1 P(\xi) - \varepsilon_1 P(x) < \varepsilon,$$

което ни учи, че функцията $P(x)$ е непрекъсната в точката ξ.

И така монотонната редица (22) от непрекъснати функции клони в крайния и затворен интервал $0 \leqq x \leqq 1$ към непрекъсната функция. Оттук заключаваме с помощта на теоремата на Дини, че тази редица е равномерно сходяща.

Като приложим същите разсъждения към редицата с общ член

$$\frac{P'_{n_i}(x)}{P'_{n_i}(1-x_1)}, \tag{26}$$

заключаваме, че и тази редица е равномерно сходяща в интервала $0 \leqq x \leqq 1$. И наистина полиномите

$$P_1'(x),\ P_2'(x), \ldots$$

са полиноми на Абел-Гончаров, които съответствуват на редицата

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots,$$

като при това $x_{n_i}=1$. Освен това обаче измежду числата

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,$$

поне едно е равно на 0 (по предположение такива има безбройно много).

От друга страна редицата с общ член

$$\frac{P_{n_i}(x)}{P'_{n_i}(1-x_1)}$$

е сходяща при $x=x_0$ и следователно е сходяща при всяко x от затворения интервал $0\leq x\leq 1$, защото редицата (26) е равномерно сходяща. По-специално тя е сходяща при $x=1-x_0$. Ще покажем, че границата ѝ е различна от нула. И наистина в противен случай при всяко x от затворения интервал ще имаме

$$\lim_{i\to\infty}\frac{P_{n_i}(x)}{P'_{n_i}(1-x_1)}=0,$$

защото

$$|P_{n_i}(x)|\leqq|P_{n_i}(1-x_0)|.$$

Оттук, като вземем под внимание равномерната сходимост на редицата (26), получаваме

$$\lim_{i\to\infty}\frac{P'_{n_i}(x)}{P'_{n_i}(1-x_1)}=0,$$

което при $x=1-x_1$ е нарушено. С това ние показахме, че границата на редицата с общ член

$$\frac{P_{n_i}(1-x_0)}{P'_{n_i}(1-x_1)}$$

е различна от нула и следователно редицата с общ член

$$\frac{P'_{n_i}(1-x_1)}{P_{n_i}(1-x_0)}$$

е сходяща. Този резултат ни позволява да твърдим, че редицата с общ член

$$\frac{P'_{n_i}(x)}{P_{n_i}(1-x_0)}=\frac{P'_{n_i}(1-x_1)}{P_{n_i}(1-x_0)}\,\frac{P'_{n_i}(x)}{P'_{n_i}(1-x_1)}$$

е равномерно сходяща при $0\leq x\leq 1$, а следователно функцията $P(x)$ е диференцуема в затворения интервал $0\leq x\leq 1$ и

$$P'(x)=\lim_{i\to\infty}\varepsilon_0\,\frac{P'_{n_i}(x)}{P_{n_i}(1-x_0)}.$$

Тези разсъждения ние можем обаче да продължим по-нататък. По такъв начин заключаваме, че редицата с общ член

$$\frac{P_{n_i}^{(k)}(x)}{P_{n_i}(1-x_0)}$$

е равномерно сходяща при $0 \leq x \leq 1$ и следователно

$$P^{(k)}(x) = \lim_{i\to\infty} \varepsilon_0 \frac{P_{n_i}^{(k)}(x)}{P_{n_i}(1-x_0)},$$

нещо, което е достатъчно, за да можем да твърдим, че $P(x)$ принадлежи на K и

$$P^{(k)}(x_k) = 0 \qquad \text{при } k = 0, 1, 2, \ldots$$

От друга страна имаме $P(1-x_0) = 1$ и следователно функцията $P(x)$ не се анулира тъждествено.

Сега не е трудно да се покаже, че редицата

(27) $$\varepsilon_0 \frac{P_1(x)}{P_1(1-x_0)},\ \varepsilon_0 \frac{P_2(x)}{P_2(1-x_0)}, \ldots$$

е равномерно сходяща и клони към $P(x)$ при $0 \leq x \leq 1$. И наистина, за да се убедим в това, достатъчно е да разгледаме редицата

$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$$

от онези цели положителни числа, за които $x_{m_i} = 0$. Образуваме редицата

(28) $$\varepsilon_0 \frac{P_{m_1}(x)}{P_{m_1}(1-x_0)},\ \varepsilon_0 \frac{P_{m_2}(x)}{P_{m_2}(1-x_0)}, \ldots,$$

за която не е трудно да се види (както това направихме за редицата (22)), че е сходяща. Да означим с $Q(x)$ нейната граница. С помощта на същите разсъждения, които приложихме към функцията $P(x)$, се вижда, че редицата (28) е равномерно сходяща, че $Q(x) \epsilon K$ и че

$$Q^{(k)}(x_k) = 0, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

По-специално от това се вижда, че ние можем да развием $Q(x)$ по формулата (18). Това ни дава

$$Q(x) = AP(x).$$

От друга страна $Q(1-x_0) = 1$ и $P(1-x_0) = 1$ и следователно $A = 1$, т. е.

$$Q(x) = P(x).$$

С това е доказано, че редицата (27) наистина клони към $P(x)$, и то равномерно в целия интервал $0 \leq x \leq 1$. Разбира се, по същия начин се вижда, че редицата от производните

$$\varepsilon_0 \frac{P_1^{(k)}(x)}{P_1(1-x_0)},\ \varepsilon_0 \frac{P_2^{(k)}(x)}{P_2(1-x_0)}, \ldots$$

от кой да е ред е също тъй равномерно сходяща при $0 \leq x \leq 1$.

Най-сетне нека споменем, че с директно почленно диференциране (което се оправдава лесно) се вижда, че всяка функция, която допуска при $0 \leqq x \leqq 1$ развитие от вида

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x)+AP(x),$$

където $a_\nu \geqq 0$ и $A \geqq 0$, винаги принадлежи на K.

По такъв начин ние достигаме до следния резултат.

Теорема. Всяка функция $f(x)$ от K допуска развитие от вида

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu (x)+AP(x), \tag{29}$$

където a_ν и A са неотрицателни константи, а $P(x)$ е една функция от K, която удовлетворява условията

$$P^{(k)}(x_k)=0, \qquad (k=0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

и не зависи от $f(x)$. Коефициентите a_ν се определят от

$$a_\nu=\varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu).$$

Ако при всички достатъчно големи цели стойности на ν имаме или само $x_\nu=0$, или само $x_\nu=1$, функцията $P(x)$ се анулира тъждествено. Във всички останали случаи функцията $P(x)$ не се анулира тъждествено, като при това имаме равномерно

$$P(x)=\lim_{n\to\infty} \varepsilon_0 \frac{P_n(x)}{P_n(1-x_0)}$$

при $0 \leqq x \leqq 1$.

Обратно, ако една функция $f(x)$ допуска при $0 \leqq x \leqq 1$ развитие от вида (29), където $a_\nu \geqq 0$ и $A \geqq 0$, то тя принадлежи на K.

В заключение ще дадем няколко примера.

1. Ако при всички цели положителни стойности на n имаме $\varepsilon_n=1$, то $x_n=0$. В този случай развитието (29) приема вида

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f^{(\nu)}(0)\frac{x^\nu}{\nu!},$$

което е познатият резултат на С. Н. Бернщейн от [2].

2. Ако при всички цели положителни стойности на n имаме $\varepsilon_n=(-1)^n$, то $x_n=1$. В този случай развитието (29) приема вида

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu f^{(\nu)}(1)\frac{(1-x)^\nu}{\nu!}.$$

Този резултат не е съществено различен от разгледания в горния пример и се получава от него, като поставим $1-x$ вместо x.

3. Нека при всички цели положителни стойности на n имаме $\varepsilon_n = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$. В такъв случай

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1, \ldots,$$

където редицата е периодична с период 2. Да разгледаме функцията

$$\varphi(x) = \sin\frac{\pi}{2}x.$$

Очевидно $\varphi(x) \in K$ и

$$\varphi^{(k)}(x_k) = 0, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и следователно развитието (29) ще ни даде

$$\sin\frac{\pi}{2}x = AP(x).$$

Тук очевидно $A \neq 0$ и слодователно ние добиваме възможност да определим $P(x)$. В този случай развитието (29) добива вида

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu) P_\nu(x) + C \sin\frac{\pi}{2}x.$$

Това е развитието на циклично монотонните функции, намерено от С. Н. Бернщейн [3].

4. Нека редицата

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots$$

е периодична с период q, т. е. при всички цели положителни стойности на n имаме $\varepsilon_n = \varepsilon_{n+q}$. В такъв случай функцията $P^{(q)}(x)$ принадлежи на K и следователно допуска развитие от вида (29). От друга страна

$$P^{(q+k)}(x_k) = 0, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и следователно това развитие приема вида

$$P^{(q)}(x) = AP(x),$$

което е едно съвсем просто линейно диференциално уравнение с постоянни коефициенти. По такъв начин ние получаваме резултата на Бл. Сендов от неговата работа [5], който представлява едно обобщение на резултатите на С. Н. Бернщейн, разгледани в първите три примера.

Постъпила на 29. 8. 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. S. N. Bernstein. Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. Paris, 1926.
2. S. N. Bernstein. Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle. Math. Annalen, Bd. 75 (1914), 449—468.
3. С. Н. Бернштейн. О некоторых свойствах циклически монотонных функций. Известия АН СССР, серия мат. т. 14 (1950), 381—404.
4. С. Н. Бернштейн. О некоторых свойствах регулярно монотонных функций. Собрание сочинений, т. I, 350—360.
5. Бл. Сендов. Об одном классе регулярно монотонных функций. ДАН СССР, т. 110 (1956), 27—30.
6. Бл. Сендов. Върху някои свойства на регулярно-монотонните функции. Известия на Математическия институт при БАН, т. III, кн. 2 (1958)

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ РАЗВИТИЯХ РЕГУЛЯРНО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Я. Тагамлицкий

РЕЗЮМЕ

Обозначим через K множество бесконечно дифференцируемых при $0 \leq x \leqq 1$ функций $f(x)$, которые удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_n f^{(n)}(x) \geqq 0$$

при $0 \leqq x \leq 1$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Числа ε_n заданы наперед и принимают только значения ± 1.

Введем многочлены Абеля-Гончарова

$$P_0(x)=\varepsilon_0$$

$$P_n(x)=\varepsilon_0 \int\limits_{x_0}^{x} \tau_0\, dt_1 \int\limits_{x_1}^{t_1} \tau_1 dt_2 \ldots \int\limits_{x_{n-1}}^{t_{n-1}} \tau_{n-1}\, dt, \qquad n=1, 2, \ldots,$$

где

$$x_n=\frac{1-\varepsilon_n\, \varepsilon_{n+1}}{2},\ \tau_n=1-2x_n.$$

При этих обозначениях доказывается следующее.

Каждая функция $f(x)$ из K допускает разложение вида

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x)+AP(x), \tag{1}$$

где a_ν и A неотрицательные постоянные, а $P(x)$ некоторая функция из K, которая удовлетворяет условиям

$$P^{(\nu)}(x_\nu)=0, \qquad (\nu=0, 1, 2, \ldots)$$

и не зависит от функция $f(x)$. Коэффициенты a_ν определяются из равенств

$$a_\nu=\varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu).$$

Если $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu=0$ или $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu=1$, то функция $P(x)$ исчезает тождественно. Во всех остальных случаях функция $P(x)$ не равна тождественно нулю и

$$P(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{P_n(x)}{P_n(1-x_0)}$$

равномерно на отрезке $0 \leqq x \leqq 1$.

Обратно, если функция $f(x)$ допускает при $0 \leqq x \leqq 1$ разложение вида (1), причем $a_\nu \geqq 0$ и $A \geqq 0$, то она принадлежит K.

Частными случаями являются развития С. Н. Бернштейна абсолютно монотонных [2] и циклически монотонных [3] функций, а так же и более общие развития Б. Сендова [5], относящиеся к тому случаю, когда последовательность $\{\varepsilon_n\}$ периодична.

ÜBER DIE ABEL-GONTSCHAROFFSCHEN ENTWICKLUNGEN DER REGULÄR MONOTONEN FUNKTIONEN

J. Tagamlitzki

ZUSAMMENFASSUNG

Wir betrachten die Menge K aller unendlich oft für $0 \leqq x \leqq 1$ differenzierbaren Funktionen $f(x)$, welche den Bedingungen

$$\varepsilon_n f^{(n)}(x) \geqq 0 \quad (0 \leqq x \leqq 1, \quad n=0, 1, 2, \ldots)$$

genügen. Dabei sind die Zahlen ε_n vorgeschrieben und nur der Werte $+1$ und -1 fähig.

Bezeichnen wir mit $P_n(x)$ die Abel-Gontscharoffschen Polynome, die der Folge $\{\varepsilon_n\}$ entsprechen, d. h.

$$P_0(x) = \varepsilon_0$$

$$P_n(x) = \varepsilon_0 \int_{x_n}^{x} \tau_0\, dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1 dt_2 \ldots \int_{x_{n-1}}^{t_{n-1}} \tau_{n-1} dt, \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

wobei

$$x_n = \frac{1-\varepsilon_n \varepsilon_{n+1}}{2}, \quad \tau_n = 1 - 2x_n$$

ist.

Es wird folgendes bewiesen.

Jede Funktion $f(x)$ aus K lässt sich in der Form

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) + AP(x) \tag{1}$$

darstellen, wobei a_ν und A nicht negative Konstanten sind und $P(x)$ eine von $f(x)$ unabhängige Funktion aus K ist, die den Bedingungen

$$P^{(\nu)}(x_\nu) = 0, \qquad (\nu=0, 1, 2, \ldots)$$

genügt. Die Koeffizienten a_ν sind durch die Gleichungen

$$a_\nu = f^{(\nu)}(x_\nu), \qquad (\nu=0, 1, 2, \ldots)$$

eindeutig bestimmt. Ist $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = 0$ oder $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = 1$, so verschwindet $P(x)$ indentisch. Ist das nicht der Fall, so verschwindet $P(x)$ nicht indentisch.

In diesem Fall gilt

$$P(x)=\lim\frac{P_{\nu}(x)}{P_{\nu}(1-x_0)}$$

gleichmässig im Intervall $0 \leq x \leq 1$.

Lässt eine Funktion die Entwicklung (1) zu, wobei $a_{\nu} \geqq 0$, $A \geqq 0$, so gehört $f(x)$ trivialerweise zu K.

Die Bernsteinschen Entwicklungen der absolut monotonen [2] und der zyklisch monotonen [3] Funktionen, sowie die allgemeineren Entwicklungen von Sendov [5] lassen sich als Spezialfälle gewinnen.