ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИ ФАКУЛТЕТ, Том 49, 1944/55,
кн. 1 (математика и физика), ч. II

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA FACULTÉ DES SCIENCES
PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES, t. 49, 1954/55
livre 1 (mathématiques et physique), partie II

ОТДЕЛЕН ОТПЕЧАТЪК

Я. Тагамлицки

ДОПЪЛВАНЕ НА КОНУСИ И ПРИЛОЖЕНИЕ КЪМ ПРОБЛЕМАТА ЗА ОБОБЩЕНИЕ НА ПОНЯТИЕТО ФУНКЦИЯ II

Я. Тагамлицкий

ДОПОЛНЕНИЕ КОНУСОВ И ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ОБОБЩЕНИЯ ФУНКЦИЙ II

ДЪРЖАВНО ИЗДАТЕЛСТВО „НАУКА И ИЗКУСТВО"
София — 1956

ДОПЪЛВАНЕ НА КОНУСИ И ПРИЛОЖЕНИЕ КЪМ ПРОБЛЕМАТА ЗА ОБОБЩЕНИЕ НА ПОНЯТИЕТО ФУНКЦИЯ [1]

ЧАСТ II

От **Я. Тагамлицки**

§ 1. Произведение на функция с псевдофункция

В пространството S_n^σ, където $n \leqq \sigma$, по един естествен начин може да се дефинира произведението $u\,f$, където u е една n пъти диференцируема функция с непрекъсната n-та производна и $f \in S_n^\sigma$. За тази цел ще докажем, първо, че ако u и f са два полинома, като при това

$$|u^{(k)}(x)| \leqq A, \quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n,\; a \leqq x \leqq b\;,$$

където A е константа, то

$$P_n(u\,f) \leqq A\;M\;P_n(f)\;, \tag{1}$$

където M е една константа, която не зависи нито от u, нито от A, нито от f.

При $n=0$ твърдението е очевидно. За да докажем това при $n \geqq 1$, означаваме с g онази n-та примитивна функция на f, за която

$$P_n(f) = \int_a^b |g|\,dx\;. \tag{2}$$

Такава примитивна функция сигурно съществува. И наистина да означим с m степента на f и да положим

$$G(x) = \int_a^x p(t)\,dt\;,$$

където $p(t)$ е какъв да е полином, чиято степен не надминава $m+n$. В такъв случай при $a \leqq x \leqq b$ имаме

$$|G(x)| \leqq \int_a^b |p(t)|\,dt\;.$$

---

[1] Настоящата работа е продължение от публикуваната под същото заглавие работа в Годишника на Софийския университет, Физико-математически факултет, том **49**, 1954/55, книга I, част I, стр. 23—48, където е посочена съответната литература.

От друга страна,

$$G(x)=\sum_{\nu=0}^{n+m} G(x_\nu)\, L_\nu(x)\ ,$$

където $x_0\ x_1, \ldots, x_{n+m}$ са $n+m+1$ произволно избрани различни точки в интервала (a, b), а $L_\nu\ (x)$ са съответните основни интерполационни полиноми на Лагранж. Оттук получаваме

$$|\, p^{(k)}(0)\,|=\Big|\sum_{\nu=0}^{n+m} G(x_\nu)\, L_\nu^{(k+1)}(0)\Big|\leqq \sum_{\nu=0}^{n+m} |\, L_\nu^{(k+1)}(0)\,| \cdot \int_a^b |\, p(t)\,|\, dt$$

и следователно коефициентите на $p(x)$ остават ограничени, когато интегралът

$$\int_a^b |\, p(t)\,|\, dt$$

остава ограничен. По такъв начин, за да завършим доказателството, за съществуване на n-та примитивна g, която удовлетворява условието (2), достатъчно е да вземем под внимание, че този интеграл е полунепрекъснат отдолу.

И така нека g е n -та примитивна функция на f, за която е изпълнено условието (2). В такъв случай

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x u(t)\,(x-t)^{n-1}\, g^{(n)}(t)\, dt$$

$$=v(x)+(-1)^{n-1}\int_a^x \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[\, u(t)\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\ dg(t)$$

$$=w(x)+u(x)\, g(x)+(-1)^n\int_a^x g(t)\ \frac{d^n}{dt^n}\left[\, u(t)\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right] dt,$$

където $v(x)$ и $w(x)$ са полиноми, чиято степен не надминава $n-1$. По такъв начин получаваме

$$\left|\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x u(t)\,(x-t)^{n-1} f(t)\ dt-w(x)\right|$$

$$\leqq A\,|\, g(x)\,|+A\sum_{\nu=1}^{n}\frac{n!\,(b-a)^{\nu-1}}{\nu!\,(\nu-1)!\,(n-\nu)!}\int_a^b |\, g(t)\,|\, dt\ ,$$

което трябваше да докажем. В бъдеще ние винаги ще пишем за краткост

$$M=1+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{n!(b-a)^{\nu}}{\nu!(\nu-1)!(n-\nu)!} .$$

Преминаваме към дефиницията на понятието произведение $u\,f$.

Ще започнем със случая, когато u е полином. Нека $f \in S_n^{\sigma}$. Апроксимираме f относно координатната система $\{F_{\sigma\nu}\}$ с редица от полиноми

(3) $$f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_k,\ \ldots,$$

която е ограничена относно нормата P_n. В такъв случай, като означим с A една обща горна граница на

$$|u(t)|,\ |u'(t)|,\ \ldots,|u^{(n)}(t)|$$

при $a \leqq t \leqq b$, ще получим

(4) $$|P_n(u f_k)| \leqq A\ M\ P_n(f_k),$$

т. е. редицата

(5) $$u f_1,\ u f_2,\ \ldots,\ u f_k,\ \ldots$$

е ограничена относно P_n. Нека

(6) $$u f_{n_1},\ u f_{n_2},\ \ldots,\ u f_{n_k},\ \ldots$$

е коя да е сходяща относно координатната система $\{F_{\sigma\nu}\}$ подредица на (5) и φ е нейната граница. По дефиниция полагаме

$$\varphi = u f .$$

Тази дефиниция не зависи нито от специалния избор на редицата (3), нито на подредицата (6). За да се убедим в това, разглеждаме първо случая, когато $u(t)=t$. В такъв случай при $\sigma>0$ и $\nu=\sigma,\ \sigma+1,\ \ldots$ имаме следната верига от равенства

$$F_{\sigma\nu}(t f_k)=\int_a^b T_\nu(x)\left[\int_a^x \frac{t f_k(t)(x-t)^{\sigma-1}}{(\sigma-1)!}\,dt\right]dx$$

$$=\int_a^b T_\nu(x)\,x\left[\int_a^x \frac{f_k(t)(x-t)^{\sigma-1}}{(\sigma-1)!}\,dt\right]dx$$

$$-\sigma\int_a^b T_\nu(x)\left[\int_a^x \frac{f_k(t)(x-t)^{\sigma}}{\sigma!}\,dt\right]dx$$

$$=\int\limits_a^b T_\nu(x)\,x\left[\int\limits_a^x \frac{f_k(t)(x-t)^{\sigma-1}}{(n-1)!}\,dt\right]dx$$

$$+\sigma\int\limits_a^b\left[\int\limits_a^x T_\nu(s)\,ds\right]\left[\int\limits_a^x \frac{f_k(t)(x-t)^{\sigma-1}}{(\sigma-1)!}\,dt\right]dx\,.$$

Да положим

$$g_k(x)=\int\limits_a^x \frac{f_k(t)(x-t)^{\sigma-1}}{(\sigma-1)!}\,dt\,.$$

В такъв случай получаваме

$$F_{\sigma\nu}(t f_k)=\int\limits_a^b T_\nu(x)\,x\,g_k(x)\,dx+\sigma\int\limits_a^b g_k(x)\left[\int\limits_a^x T_\nu(s)\,ds\right]dx\,.$$

При тези означения резултатът е валиден и при $\sigma=0$, като в този случай под $g_k(x)$ разбираме $f_k(x)$.

От друга страна, полиномът

$$T_\nu(x)\,x+\sigma\int\limits_a^x T_\nu(s)\,ds$$

е ортогонален на полиномите, чиято степен не надминава $\nu-2$. Оттук заключаваме, че

$$T_\nu(x)\,x+\sigma\int\limits_a^x T_\nu(s)\,ds=a_{\sigma\nu}\,T_{\nu+1}(x)+b_{\sigma\nu}\,T_\nu(x)+c_{\sigma\nu}\,T_{\nu-1}(x),$$

където $a_{\sigma\nu}$, $b_{\sigma\nu}$, $c_{\sigma\nu}$ са константи. Под $c_{\sigma 0}$ разбираме 0. Това ни позволява да пишем

$$F_{\sigma\nu}(t f_k)=a_{\sigma\nu}\,F_{\sigma\nu+1}(f_k)+b_{\sigma\nu}\,F_{\sigma\nu}(f_k)+c_{\sigma\nu}\,F_{\sigma\nu-1}(f_k) \tag{7}$$

при $\nu=\sigma,\ \sigma+1,\ \sigma+2,\ \ldots$ Равенството (7) има смисъл и при $\nu=\sigma$, защото $c_{\sigma\sigma}=0$, както това се вижда от равенството

$$c_{\sigma\sigma}=\int\limits_a^b T_{\sigma-1}(x)\left[T_\sigma(x)\,x+\sigma\int\limits^x T_\sigma(s)\,ds\right]dx$$

$$=\int\limits_a^b T_\sigma(x)\left[T_{\sigma-1}(x)\,x+\sigma\int\limits_x^b T_{\sigma-1}(s)\,ds\right]dx=0,$$

във верността на което се убеждаваме, като вземем под внимание, че полиномът

$$xT_{\sigma-1}(x)+\sigma\int_x^b T_{\sigma-1}(s)\,ds$$

е най-много от $\sigma-1$-ва степен. Равенството (7) ни учи, че при $u(t)=t$ имаме

$$F_{\sigma\nu}(\varphi)=a_{\sigma\nu}F_{\sigma\nu+1}(f)+b_{\sigma\nu}F_{\sigma\nu}(f)+c_{\sigma\nu}F_{\sigma\nu-1}(f)$$

и следователно елементът φ наистина не зависи от специалния избор нито на редицата (3), нито на редицата (6). С това е показано, че дефиницията на произведението tf е наистина еднозначна.

За да установим еднозначността на дефиницията на произведения от вида $t^m f$, където m е цяло положително число, разсъждаваме индуктивно, като вземем под внимание, че

$$F_{\sigma\nu}(t^m f_k)=F_{\sigma\nu}(t\,.\,t^{m-1}f_k)$$

и следователно

$$\lim_{k\to\infty}F_{\sigma\nu}(t^m f_k)=F_{\sigma\nu}(t\,.\,t^{m-1}f)\,.$$

След всичко изложено вече не е трудно да се установи еднозначността на дефиницията в случая, когато u е произволен полином. Очевидно не е необходимо да се спираме върху подробностите. Ще отбележим само, че неравенството (1) очевидно запазва валидността си и тогава, когато $f\in S_n^\sigma$, а u е полином.

Дефиницията на произведението uf, където $f\in S_n^\sigma$, може да се обобщи и за случая, когато u е една n пъти диференцируема функция в интервала $[a, b]$ с непрекъсната n-та производна. За тази цел избираме редица от полиноми

$$(8)\qquad u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_p,\ \ldots$$

по такъв начин, че редиците от производните

$$u_1^{(k)},\ u_2^{(k)},\ \ldots,\ u_p^{(k)},\ \ldots$$

равномерно да клонят към $u^{(k)}$ при $a\leqq x\leqq b$ и $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Такава редица сигурно съществува. За да се убедим в това, достатъчно е да интегрираме n пъти една редица от полиноми, която равномерно клони към непрекъснатата функция $u^{(k)}$, като при това избираме по подходящ начин интеграционните константи.

Нека A е една обща горна граница на функциите

$$|u_p^{(k)}(x)|\quad \text{при}\quad a\leqq x\leqq b;\ \ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ \ p=1,\ 2,\ \ldots$$

В такъв случай имаме

$$P_n(u_p f) \leqq MAP_n(f),$$

откъдето следва, че редицата

$$u_1 f,\ u_2 f,\ u_3 f,\ \ldots \tag{9}$$

притежава поне една сходяща подредица

$$u_{m_1} f,\ u_{m_2} f,\ u_{m_3} f,\ \ldots \tag{10}$$

Да означим с φ границата на подредицата (10) относно координатната система $\{F_{\sigma\nu}\}$. Ние ще покажем, че редицата (9) също клони към φ. И наистина

$$|F_{\sigma\nu}(\varphi) - F_{\sigma\nu}(u_p f)| \leqq |F_{\sigma\nu}(\varphi) - F_{\sigma\nu}(u_{m_p} f)|$$

$$+ |F_{\sigma\nu}(u_{m_p} f) - F_{\sigma\nu}(u_p f)| \leqq |F_{\sigma\nu}(\varphi) - F_{\sigma\nu}(u_{m_p} f)|$$

$$+ |F_{\sigma\nu}[(u_{m_p} - u_p) f]|.$$

Избираме положително число ε и след това даваме на p толкова голяма стойност, че да имаме

$$|F_{\sigma\nu}(\varphi) - F_{\sigma\nu}(u_{m_p} f) \leqq \varepsilon$$

и

$$|u_{m_p}^{(k)} - u_p^{(k)}| \leqq \varepsilon$$

при $k=0, 1, \ldots, n$ и при всяко x от интервала $[a, b]$. В такъв случай

$$P_n[(u_{m_p} - u_p) f] \leqq \varepsilon MP_n(f)$$

и следователно

$$|F_{\sigma\nu}(\varphi) - F_{\sigma\nu}(u_p f)| \leqq \varepsilon + \varepsilon B_{\sigma\nu} P_n(f),$$

където $B_{\sigma\nu}$ е една независеща от ε константа.

По дефиниция ще положим

$$uf = \varphi.$$

Тази дефиниция не зависи от специалния избор на редицата (8). И наистина, ако

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots$$

е друга редица от полиноми, която клони към u, и редиците от производните до n-ти ред са равномерно сходящи в интервала $[a, b]$, то същото е вярно и за редицата

$$u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2,\ u_3,\ v_3,\ \ldots$$

Оттук заключаваме, че редицата

$$u_1 f,\ v_1 f,\ u_2 f,\ v_2 f,\ \ldots$$

е сходяща относно координатната система $\{F_{\sigma\nu}\}$ и следователно двете нейни подредици

$$u_1 f,\ u_2 f,\ \ldots,$$

$$v_1 f,\ v_2 f,\ \ldots$$

имат една и съща граница. С това еднозначността на произведението uf е установена.

Не е трудно да се установи, че ако u е една n пъти диференцируема функция с непрекъсната n-та производна, която удовлетворява неравенствата

$$|u^{(k)}(x)| \leqq A$$

при $a \leqq x \leqq b$ и $k=0, 1, \ldots, n$, то при всяко f от S_n^a имаме

$$P_n(uf) \leqq ABP_n(f),$$

където B е една независеща от u, f и A константа.

За да установим това, апроксимираме u с редица от полиноми

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,$$

която е равномерно сходяща заедно с редиците от производните до n-ти ред и удовлетворява неравенствата

$$|u_m^{(k)}(x)| \leqq NA$$

при $a \leqq x \leqq b$, $k=0, 1, \ldots, n$ и $m=1, 2, 3, \ldots$, където N е една независяща нито от A, нито от u константа. Това може да се постигне, като за $u_m^{(n)}(x)$ се изберат полиномите на Бернщейн, които апроксимират функцията $u^{(n)}(x)$, а функциите $u_m(x)$ се определят след това чрез интегриране, като интеграционните константи се избират по подходящ начин. В такъв случай имаме

$$P_n(u_m f) \leqq NAMP_n(f),$$

откъдето получаваме

$$P_n(uf) \leqq NAMP_n(f),$$

тъй като нормата P_n е полунепрекъсната отдолу. В бъдеще за краткост ще пишем

$$NM = B.$$

От доказаното следва без всякакъв труд, че ако редицата

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots$$

от n пъти диференцируеми функции с непрекъснати n-ти производни клони равномерно към функцията u, а редиците от производните

$$u_1^{(k)},\ u_2^{(k)},\ \ldots$$

до n-ти ред включително са равномерно сходящи в $[a, b]$, то при всеки избор на f от S_n^o редицата

$$u_1 f,\ u_2 f,\ u_3 f,\ \ldots$$

клони към uf силно относно нормата P_n (а следователно и относно координатната система $\{F_{\sigma\nu}\}$).

В заключение на този параграф ще докажем следната полезна теорема:

Нека редицата

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots$$

от елементи на S_n^o е ограничена относно нормата P_n и клони към f относно координатната система $\{F_{\sigma\nu}\}$. Нека функцията е u пъти диференцируема в $[a, b]$ и нейната n-та производна е непрекъсната. В такъв случай редицата

$$uf_1,\ uf_2,\ uf_3,\ \ldots$$

е сходяща и клони към uf относно координатната система $\{F_{\sigma\nu}\}$.

Забележка. При $n=0$ тази теорема може да се разглежда като еквивалент на една известна теорема на Хели за Стилтйесови интеграли.

Доказателство. Нека ε е положително число и v е полином, който удовлетворява неравенствата

$$|u^{(k)}-v^{(k)}| \leqq \varepsilon$$

при $a \leqq x \leqq b$ и $k=0, 1, 2, \ldots, n$.
В такъв случай

$$(11)\quad |F_{\sigma\nu}(uf)-F_{\sigma\nu}(uf_m)| \leqq |F_{\sigma\nu}((u-v)f_m)| + |F_{\nu\nu}(u-v)f)| + |F_{\sigma\nu}(vf_m)-F_{\sigma\nu}(vf)|.$$

По-нататък нека

$$P_n(f_m) < A,$$

където A е константа, която не зависи от n, и нека редицата от полиноми

$$f_{m1},\ f_{m2},\ f_{m3},\ \ldots$$

клони към f_m относно координатната система $\{F_{\sigma\nu}\}$, като при това

$$P_n(f_{ms}) < A.$$

Означаваме с r_m цяло положително число, за което да имаме

$$|F_{\sigma\nu}(f_m - f_{mr_m})| \leqq \frac{1}{m} \text{ и } \left| F_{\sigma\nu}\left(vf_m - vf_{mr_m}\right) \right| \leqq \frac{1}{m}$$

при $\nu=\sigma, \sigma+1, \ldots, \sigma+m$.

В такъв случай при фиксирано ν, както и да изберем $\delta>0$, имаме при достатъчно голямо m

$$|F_{\sigma\nu}(f - f_{mr_m})| \leqq |F_{\sigma\nu}(f - f_m)| + |F_{\sigma\nu}(f_m) - F_{\sigma\nu}(f_{mr_m})| \leqq \delta + \frac{1}{m}$$

и следователно редицата

$$f_{1r_1},\ f_{2r_2},\ f_{3r_3}, \ldots$$

клони към f. Като вземем под внимание, че тя е ограничена по норма и че v е полином, заключаваме, че редицата

$$vf_{1r_1},\ vf_{2r_2},\ vf_{3r_3}, \ldots$$

клони към vf. От друга страна от (11) имаме

$$|F_{\sigma\nu}(uf_m) - F_{\sigma\nu}(uf)| \leqq C\varepsilon + |F_{\sigma\nu}(vf_m) - F_{\sigma\nu}(vf)|,$$

където C е една независеща от ε и m константа и следователно

$$|F_{\sigma\nu}(uf_m) - F_{\sigma\nu}(uf)| \leqq C\varepsilon + |F_{\sigma\nu}(vf_m - vf_{mr_m})| + |F_{\sigma\nu}(vf_{mr_m} - vf)|,$$

т. е. при $m>\nu$.

$$|F_{\sigma\nu}(uf_m) - F_{\sigma\nu}(uf)| \leqq C\varepsilon + \frac{1}{m} + |F_{\sigma\nu}(vf_{mr_m}) - F_{\sigma\nu}(vf)|,$$

с което всичко е доказано, защото при достатъчно голямо m имаме

$$|F_{\sigma\nu}(vf_{mr_m}) - F_{\sigma\nu}(vf)| \leqq \varepsilon.$$

В заключение на този параграф ще отбележим, че дефинираното от нас произведение е асоциативно и дистрибутивно в смисъл, че са валидни равенствата

$$u(vf) = (uv)f,$$

$$u(f+g) = uf + ug,$$

$$(u+v)f = uf + vf,$$

където u и v са n пъти диференцируеми функции с непрекъсната n-та производна, а f и g са елементи на S_n^n. Ние няма да се спираме върху доказателството, което е тривиално.

§ 2. Позитивни елементи на пространството S_0^0

Нека $f \epsilon S_0^0$. Ще пишем $f \geqq 0$ и ще казваме, че елементът f е неотрицателен или позитивен, ако този елемент може да се представи като граница относно $\{F_{0\nu}\}$ на редица от неотрицателни в обикновения смисъл полиноми

$$f_1, \ f_2, \ f_3, \dots$$

Един неотрицателен елемент f на S_0^0 ще наричаме положителен, ако той е различен от нула. Един елемент f от S_0^0 ще наричаме отрицателен, ако елементът $-f$ е положителен.

Не е трудно да се установи, че за да бъде един елемент f от S_0^0 неотрицателен, необходимо и достатъчно е да имаме

$$F_{00}(f) = \lambda P_0(f),$$

където

$$\lambda = \frac{F_{00}(1)}{P_0(1)}$$

Доказателство. Нека f е един неотрицателен елемент на S_0^0. Разглеждаме редица от полиноми

$$g_1, \ g_2, \ g_3, \dots,$$

която апроксимира добре елемента f. Очевидно

$$F_{00}(g_k) \leqq \lambda P_0(g_k)$$

и следователно

$$F_{00}(f) \leqq \lambda P_0(f)$$

(разбира се, при тези разсъждения ние не използувахме, че $f \geqq 0$). От друга страна, $f \geqq 0$ и следователно съществува редица от неотрицателни полиноми

$$f_1, \ f_2, \ f_3, \dots,$$

която клони към f относно координатната система $\{F_{0\nu}\}$. Тези полиноми очевидно удовлетворяват условията

$$F_{00}(f_k) = \lambda P_0(f_k)$$

(защото са неотрицателни в обикновения смисъл). Оттук получаваме

$$F_{00}(f) \geqq \lambda P_0(f)$$

и следователно $F_{00}(f) = \lambda P_0(f)$.

Обратно, нека f е един елемент от S_0^0, за който имаме

$$F_{00}(f) = \lambda P_0(f).$$

Нека редицата от полиноми

$$f_1, \quad f_2, \quad f_3, \ . \ . \ .$$

добре апроксимира елемента f относно координатната система $\{F_{0\nu}\}$. В такъв случай

$$\lim_{k\to\infty} [\lambda P_0(f_k) - F_{00}(f_k)] = \lambda P_0(f) - F_{00}(f) = 0$$

и следователно

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b (|f_k| - f_k)\,dx = 0.$$

Оттук и от неравенството

$$\left| \int_a^b T_\nu(x)\ (|f_k| - f_k)\ dx \right| \leqq \lambda_\nu \int_a^b (|f_k| - f_k)\ dx,$$

където λ_ν е една независеща от k константа, заключаваме, че

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b T_\nu(x)\,|f_k|\,dx = F_{0\nu}(f).$$

Нека g_k е полином на Бернщейн на функцията $|f_k|$, за който

$$\Big|\ |f_k| - g_k \Big| \leqq \frac{1}{k} \quad \text{при} \quad a \leqq x \leqq b.$$

Тогава $g_k \geqq 0$ и освен това

$$\left| \int_a^b T_\nu(x)\ g_k(x)\,dx - \int_a^b T_\nu(x)\,|f_k(x)|\ dx \right| \leqq \lambda_\nu \frac{b-a}{k},$$

т. е.

$$\lim \int_a^b T_\nu(x)\ g_k(x)\,dx = F_{0\nu}(f).$$

По такъв начин ние можахме да апроксимираме елемента f с редица от неотрицателни полиноми g_k и следователно $f \geqq 0$.

В допълнение към изложеното ще спомена, че полиномите g_k апроксимират елемента f добре, защото

$$\left| \int_a^b |g_k|\,dx - \int_a^b |f_k|\,dx \right| \leqq \int_a^b \Big|\ g_k - |f_k|\ \Big|\ dx \leqq \frac{b-a}{k}.$$

С това установихме, че ако $f \geqq 0$, този елемент f може добре да се апроксимира с редица от неотрицателни полиноми.

Не е трудно да се установи, че съвкупността от неотрицателните елементи на S_0^0 е тъй да се каже затворена. По-точно, ако редицата

$$f_1, \ f_2, \ f_3, \ldots$$

от елементи на S_0^0 клони относно координатната система $\{F_{0\nu}\}$ към f и ако $f_k \geqq 0$ при $k=1, 2, 3, \ldots$, то $f \geqq 0$.

Доказателство. Неравенствата $f_k \geqq 0$ ни дават

$$F_{00}(f_k) = \lambda P_0(f_k).$$

Оттук въз основа на полунепрекъснатостта на нормата получаваме

$$F_{00}(f) \geqq \lambda P_0(f),$$

което заедно с неравенството

$$F_{00}(f) \leqq \lambda P_0(f)$$

дава

$$F_{00}(f) = \lambda P_0(f).$$

Въз основа на доказаното лесно се установява, че ако f е един неотрицателен елемент на S_0^0 и ако u една неотрицателна непрекъсната функция, то $uf \geqq 0$.

Доказателство. Нека на първо време u е неотрицателен полином. Апроксимираме f добре с редица от неотрицателни полиноми

$$f_1, \ f_2, \ f_3, \ldots$$

Тогава полиномите uf_k клонят към uf относно координатната система $\{F_{0\nu}\}$. Като вземем под внимание, че произведенията uf_k са неотрицателни в обикновения смисъл на думата и са полиноми, заключаваме, че uf е неотрицателен елемент на S_0^0.

Преминаваме към случая, когато u е произволна неотрицателна непрекъсната функция. Нека $f \in S_0^0$ и $f \geqq 0$. Апроксимираме непрекъснатата и неотрицателна функция u равномерно с редица от неотрицателни полиноми

$$u_1, \ u_2, \ u_3, \ldots$$

За целта най-удобно е да използуваме полиномите на Бернщейн.

Съгласно доказаното по-горе имаме $u_k f \geqq 0$. Като вземем под внимание, че произведенията $u_k f$ клонят към uf относно координатната система $\{F_{0\nu}\}$, заключаваме, че $uf \geqq 0$.

Ще докажем, че всеки елемент на S_0^0 може да се представи като разлика на два негови неотрицателни елемента.

Доказателство. Нека f е произволен елемент от S_0^0. Разглеждаме редица от полиноми

$$f_1, \quad f_2, \quad f_3, \; . \; . \; . \; ,$$

която апроксимира добре елемента f. Нека g_k е Бернщейнов полином на функцията $|f_k|$, който удовлетворява неравенството

$$\left| \; |f_k| - g_k \; \right| \leqq \frac{1}{k}$$

при $a \leqq x \leqq b$. Редицата

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \; . \; . \; .$$

е ограничена относно нормата P_0 и следователно от нея може да се избере сходяща относно координатната система $\{F_{0\nu}\}$ подредица

$$g_{m_1}, \quad g_{m_2}, \quad g_{m_3}, \; . \; . \; . \; .$$

Да означим с g нейната граница. Като вземем под внимание, че

$$g_k + \frac{1}{k} + f_k \geqq 0,$$

$$g_k + \frac{1}{k} - f_k \geqq 0,$$

заключаваме, че

$$g + f \geqq 0,$$

$$g - f \geqq 0$$

и следователно равенството

$$f = \frac{g+f}{2} - \frac{g-f}{2}$$

ни дава исканото представяне. С това доказателството е завършено

Най-сетне нека отбележим, че ако $f \geqq 0$, то

$$\lambda F_{00}(f) \geqq 0,$$

нещо, което се вижда веднага от равенството.

$$F_{00}(f) = \lambda P_0(f).$$

Направените в този параграф разглеждания могат да се обобщят по следния начин. Нека K е един изпъкнал конус с полунорма $P(f)$ и нека $F(f)$ е линеен функционал, дефиниран в K, за който е изпълнено неравенството

$$F(f) \leqq P(f)$$

при всяко f от K. Един елемент f от K ще наричаме позитивен относно линейния функционал F и полунормата P, ако е изпълнено равенството

$$F(f)=P(f).$$

Не е трудно да се види, че съвкупността на позитивните елементи на K относно даден линеен функционал и дадена полунорма е винаги изпъкнал конус. Позитивните елементи на S_0^0, за които говорихме по-горе, са позитивни относно линейния функционал $\frac{1}{\lambda}F_{00}$ и нормата P_0.

Постъпила на 17. IX. 1955 г.

ДОПОЛНЕНИЕ КОНУСОВ И ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ОБОБЩЕНИЯ ФУНКЦИЙ

ЧАСТЬ II

Я. Тагамлицкий

(РЕЗЮМЕ)

В публикуемой здесь второй части нашего исследования дается определение произведения n-кратно дифференцируемой функции с непрерывной n-нной производной на элемент пространства S_n^σ и вводится понятие позитивного элемента пространства S_0^0.