

**ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР**

НОВАЯ СЕРИЯ

1952

ОТТИСК ИЗ т. LXXXVII, № 2

Я. А. ТАГАМЛИЦКИЙ

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ РЯДЕ НЬЮТОНА
С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 19 IX 1952)

Будем пользоваться следующим обозначением: если

$$F(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

многочлен, не имеющий кратных нулей, то

$$[f(t), \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = \frac{f(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)} + \frac{f(\alpha_2)}{F'(\alpha_2)} + \dots + \frac{f(\alpha_n)}{F'(\alpha_n)}. \quad (1)$$

В случае кратных нулей многочлена $F(x)$ символ (1) определяется обычным переходом к пределу в предположении, что функция $f(x)$ имеет необходимые производные.

Пусть

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots$$

бесконечная последовательность положительных чисел, для которой

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{x_v} = \infty. \quad (2)$$

Мы будем искать условия, при которых бесконечно дифференцируемая при $0 < x < \lim_{v \rightarrow \infty} x_v$ функция $f(x)$ разлагается в ряд Ньютона с неотрицательными коэффициентами

$$f(x) = a_0 + a_1(x_1 - x) + a_2(x_1 - x)(x_2 - x) + \\ + a_3(x_1 - x)(x_2 - x)(x_3 - x) + \dots \quad (3)$$

Теорема. Бесконечно дифференцируемая при $0 < x < \lim_{v \rightarrow \infty} x_v$ функция $f(x)$ разлагается при $0 < x < \lim_{v \rightarrow \infty} x_v$ тогда и только тогда в ряд Ньютона (3) с неотрицательными коэффициентами при x_v , удовлетворяющих условию (2), когда

$$(-1)^n [f(t), x, x_1, x_2, \dots, x_n] \geq 0, \quad (4)$$

$$(-1)^{n+1} [f(t), x, \xi, x_1, x_2, \dots, x_n] \geq 0 \quad (5)$$

при $0 < x < x_{n+1}$, $0 < \xi < x_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Замечание. Условие (5) выражает, что функция

$$\varphi_n(x) = (-1)^n [f(t), x, x_1, x_2, \dots, x_n]$$

не возрастает при $0 < x < x_{n+1}$, как это видно из тождества

$$\frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(\xi)}{x - \xi} = (-1)^n [f(t), x, \xi, x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Доказательство. Необходимость условий (4) и (5) для существования разложения (3) очевидна, так как из (3) получаем

$$\begin{aligned} & (-1)^n [f(t), x, x_1, x_2, \dots, x_n] = \\ & = a_n + a_{n+1}(x_{n+1} - x) + a_{n+2}(x_{n+1} - x)(x_{n+2} - x) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

и, следовательно, функции

$$\varphi_n(x) = (-1)^n [f(t), x, x_1, x_2, \dots, x_n]$$

неотрицательны и не возрастают при $0 < x < x_{n+1}$.

Переходим к доказательству достаточности условий (4) и (5) для существования разложения (3). Для этого обозначим через N множество бесконечно дифференцируемых при $0 < x < \lim_{v \rightarrow \infty} x_v$ функций,

которые удовлетворяют условиям (4) и (5).

Пусть $f(x) \in N$ и

$$\begin{aligned} R_m(x) = f(x) - a_0 - a_1(x_1 - x) - a_2(x_1 - x)(x_2 - x) - \dots \\ \dots - a_m(x_1 - x)(x_2 - x) \dots (x_m - x), \end{aligned}$$

где

$$a_k = (-1)^k [f(t), x_1, x_2, \dots, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Нетрудно убедиться, что $R_m(x) \in N$. Для этого заметим, что при $n \geq m + 1$

$$[R_m(t), x, x_1, \dots, x_n] = [f(t), x, x_1, x_2, \dots, x_n]. \quad (7)$$

С другой стороны,

$$R_m(x_1) = R_m(x_2) = \dots = R_m(x_{m+1}) = 0,$$

и, следовательно, при $n \leq m$ будем иметь

$$\begin{aligned} (-1)^n [R_m(t), x, x_1, x_2, \dots, x_n] &= \frac{(-1)^n R_m(x)}{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)} = \\ &= \frac{(-1)^{m+1} (x_{n+1} - x) \dots (x_{m+1} - x) R_m(x)}{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)(x - x_{n+1}) \dots (x - x_{m+1})} = \\ &= (-1)^{m+1} (x_{n+1} - x) \dots (x_{m+1} - x) [R_m(t), x, x_1, \dots, x_{m+1}] = \\ &= (-1)^{m+1} (x_{n+1} - x) \dots (x_{m+1} - x) [f(t), x, x_1, \dots, x_{m+1}]. \end{aligned}$$

Таким образом установлено, что функции

$$\psi_n(x) = (-1)^n [R_m(t), x, x_1, x_2, \dots, x_n]$$

в самом деле неотрицательны и не возрастают при $0 < x < x_{n+1}$.

Теперь нетрудно установить, что если выполнены условия (4) и (5), то функция $f(x)$ разлагается в ряд (3). Для этого заметим, что при $0 < \xi < x < x_{m+1}$

$$0 \leq (-1)^{m+1} [R_m(t), x, x_1, \dots, x_{m+1}] \leq (-1)^{m+1} [R_m(t), \xi, x_1, \dots, x_{m+1}],$$

т. е.

$$\begin{aligned} |R_m(x)| &\leq |R_m(\xi)| \left| \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{m+1})}{(\xi-x_1)(\xi-x_2)\dots(\xi-x_{m+1})} \right| = \\ &= |R_m(\xi)| \left| \left(1 - \frac{x-\xi}{x_1-\xi}\right) \left(1 - \frac{x-\xi}{x_2-\xi}\right) \dots \left(1 - \frac{x-\xi}{x_{m+1}-\xi}\right) \right|. \end{aligned}$$

Принимая во внимание условие (4), заключаем, что

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^k [f(t), x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}] = \\ &= (-1)^k [f(t), x_{k+1}, x_1, x_2, \dots, x_k] \geq 0, \end{aligned}$$

т. е. при $0 < \xi < x_1$

$$0 \leq R_m(\xi) \leq f(\xi),$$

и, следовательно,

$$|R_m(x)| \leq f(\xi) \left| \left(1 - \frac{x-\xi}{x_1-\xi}\right) \left(1 - \frac{x-\xi}{x_2-\xi}\right) \dots \left(1 - \frac{x-\xi}{x_{m+1}-\xi}\right) \right|.$$

Далее на основании условия (2) заключаем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x-\xi}{x_1-\xi}\right) \left(1 - \frac{x-\xi}{x_2-\xi}\right) \dots \left(1 - \frac{x-\xi}{x_{m+1}-\xi}\right) = 0$$

при $x > \xi$, и, следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_m(x) = 0$$

при $\xi < x < \lim_{v \rightarrow \infty} x_v$. Таким образом мы получаем при $0 < x < \lim_{v \rightarrow \infty} x_v$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x_1 - x) + a_2(x_1 - x)(x_2 - x) + \dots,$$

где коэффициенты $a_k = (-1)^k [f(t), x_1, x_2, \dots, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, как мы уже заметили выше, неотрицательны.

П р и л о ж е н и е. Если функция $f(x)$, бесконечно дифференцируемая при $0 < x < \lim_{v \rightarrow \infty} x_v$, удовлетворяет неравенствам

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

при $0 < x < \lim_{v \rightarrow \infty} x_v$, то при $0 < x < x_{n+1}$, $0 < \xi < x_{n+1}$

$$(-1)^n [f(t), x, x_1, \dots, x_n] = \frac{(-1)^n f^{(n)}(\eta)}{n!} \geq 0,$$

$$(-1)^{n+1} [f(t), x, \xi, x_1, \dots, x_n] = \frac{(-1)^{n+1} f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} \geq 0,$$

и, следовательно, функция $f(x)$ разлагается при $0 < x < \lim_{v \rightarrow \infty} x_v$ в ряд вида (3). В случае $x_1 = x_2 = x_3 = \dots$ получаем классическую теорему С. Н. Бернштейна⁽¹⁾ об аналитичности абсолютно монотонных функций.

Математический институт
Софийского университета
Болгария

Поступило
10 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Бернштейн, Math. Ann., 75, 449 (1914).