# ДОКЛАДЫ

## АКАДЕМИИ НАУК СССР

НОВАЯ СЕРИЯ

## 1947

ОТТИСК из т. LVIII, № 2

Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Я. А. ТАГАМЛИЦКИЙ

# ОБ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩЕМСЯ ИНТЕГРАЛЕ ЛАПЛАСА

*(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 23 VIII 1947)*

В этой заметке мы дадим необходимые и достаточные условия для того, чтобы функцию $f(x)$ можно было представить абсолютно сходящимся интегралом

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xt}F(t)\,dt$$

при $x>a$ (о работах других авторов см. ([1]) и ([2])). Несобственный интеграл будем рассматривать как предел лебеговых интегралов:

$$\int_0^\infty e^{-xt}F(t)\,dt=\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-xt}F(t)\,dt.$$

Пусть $g(x)$ — функция, которую при $x>a$ можно представить в виде

$$g(x)=\int_0^\infty e^{-xt}G(t)\,dt,$$

где $G(t)\geqslant 0$. Мы обозначим через $G_k(t)$ оператор Пост—Виддера

$$G_k(t)=\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}g^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right).$$

Доказательство наше основывается на следующих трех леммах:

Лемма 1. *Функция $e^{-xt}G_k(t)$ суммируема в интервале $(0,k/x)$ при $x>a$.*

Доказательство. Так как функция $g(x)$ регулярно монотонна и стремится к нулю вместе с $1/x$, то $g^{(k)}(x)=o(x^{-k})$. Из этого заключаем, интегрируя по частям, что интеграл

$$g(x)=\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_x^\infty g^{(k)}(t)(t-x)^{k-1}\,dt$$

сходится. Подставляя $t=k/u$, находим

$$g(x)=\int_0^{k/x}\left(1-\frac{xu}{k}\right)^{k-1}G_k(u)\,du.$$

Суммируемость функции $e^{-xt}G_k(t)$ вытекает, следовательно, из

$$0\leqslant e^{-xt}G_k(t)\leqslant\frac{\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}G_k(t)}{e\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-1}}.$$

Лемма 2. *Пусть $E$ — любое измеримое множество, лежащее в конечном интервале $(0, b)$. При $x > a$ имеет место*

$$\lim_{k \to \infty} \int_E e^{-xt} G_k(t)\, dt = \int_E e^{-xt} G(t)\, dt \qquad (1)$$

(*мы установим также и существование предела*).

Доказательство. При $k > bx$ имеем:

$$\int_E e^{-xt} G_k(t)\, dt = \int_E e^{-xt} \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \left[\int_0^\infty e^{-k\tau/t} \tau^k G(\tau)\, d\tau\right] dt;$$

после подстановки $\tau/t = u$, на основании теорем Фубини и Тонелли можно переменить порядок интеграции:

$$\int_E e^{-xt} G_k(t)\, dt = \frac{k^{k+1}}{k!} \int_0^\infty e^{-ku} u^k \left[\int_E e^{-xt}\, G(tu)\, dt\right] du\,.$$

Для того чтобы показать существование предела (1) и вычислить его значение, достаточно установить, что

$$\lim_{u \to 1} \int_E e^{-xt} G(tu)\, du = \int_E e^{-xt} G(t)\, dt$$

(см., например, ([3]), стр. 130). Очевидно, имеем

$$\left|\int_E e^{-xt}\, G(tu)\, dt - \int_E e^{-xt}\, G(t)\, dt\right| \leqslant \int_0^\infty e^{-xt} |\, G(tu) - G(t)\,|\, dt. \qquad (2)$$

Пусть $\varepsilon$ — положительное число. Можно подобрать $p > 0$ так, что $\int\limits_{p/2}^\infty e^{-\frac{x}{2}t}\, G(t)\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$ и, следовательно,

$$\int_p^\infty e^{-xt}\, G(tu)\, dt = \int_{up}^\infty e^{-x\lambda/u}\, G(\lambda)\, d\lambda \leqslant \int_{p/2}^\infty e^{-x\lambda/2}\, G(\lambda)\, d\lambda \leqslant \frac{\varepsilon}{5},$$

если $1/2 \leqslant u \leqslant 2$. С другой стороны, в $[0,2p]$ существует такая непрерывная функция $P(t)$, что $\int\limits_0^{2p} |\, G(t) - P(t)\,|\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{5} \cdot$ Из этого заключаем, что

$$\int_0^p e^{-xt} |\, G(tu) - G(t)\,|\, dt \leqslant \int_0^p e^{-xt} |\, G(tu) - P(tu)\,|\, dt +$$

$$+ \int_0^p e^{-xt} |\, G(t) - P(t)\,|\, dt + \int_0^p e^{-xt} |\, P(tu) - P(t)\,|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2p} |\, G(t) - P(t)\,|\, dt + \int_0^p |\, G(t) - P(t)\,|\, dt + \int_0^p |\, P(tu) - P(t)\,|\, dt. \qquad (3)$$

Так как функция $P(t)$ равномерно непрерывна в замкнутом интервале $[0,2p]$, то можно подобрать такое положительное число $\delta$, чтобы последний интеграл в (3) был $\leqslant \frac{\varepsilon}{5}$ при $|\, u - 1\,| \leqslant \delta$, и, следовательно, выражение (2) $\leqslant \varepsilon$.

Лемма 3. *Пусть $b$ — любое положительное число. Тогда*

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{b}^{k/x}\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}G_k(t)\,dt=\int\limits_{b}^{\infty}e^{-xt}G(t)\,dt$$

(*мы установим также и существование предела*).

Доказательство. На основании одного результата Виддера ([2]) имеем почти всюду $\lim\limits_{k\to\infty}G_k(t)=G(t)$ и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}G_k(t)=e^{-xt}G(t).$$

На основании леммы 3 имеем: $\int\limits_E e^{-\lambda t}G_k(t)\,dt=\int\limits_E e^{-\lambda t}G(t)\,dt$ для каждого измеримого множества $E$, находящегося в интервале $(0,b)$, если $\lambda>a$. С другой стороны, $0\leqslant\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}G_k(t)\leqslant e^{-\lambda t}G_k(t)$ при $x>\lambda$, $k>bx$ и $k>\frac{x}{x-\lambda}$, и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_0^b\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}G_k(t)\,dt=\int\limits_0^b e^{-xt}G(t)\,dt. \tag{4}$$

Так как функция $g(x)$ регулярно монотонна и стремится к нулю вместе с $1/x$, то $g^{(k)}(x)=o(x^{-k})$, откуда, интегрируя по частям,

$$g(x)=\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int\limits_x^\infty g^{(k-1)}(u)(u-x)^{k-1}du$$

и, следовательно,

$$g(x)=\int\limits_0^{k/x}\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}G_k(t)\,dt=\int\limits_0^\infty e^{-xt}G(t)\,dt. \tag{5}$$

На основании (4) и (5) получаем:

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits^{k/x}\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}G_k(t)\,dt=\int\limits_b^\infty e^{-xt}G(t)\,dt.$$

Теорема. *Для того чтобы бесконечно дифференцируемую функцию $f(x)$ можно было представить при $x>a$ в виде абсолютно сходящегося интеграла*

$$f(x)=\int\limits_0^\infty e^{-xt}F(t)\,dt,$$

*необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $g(x)$, которую можно представить в виде интеграла того же типа:*

$$g(x)=\int\limits_0^\infty e^{-xt}G(t)\,dt,\quad x>a,$$

*причем $G(t)\geqslant 0$, так что $|f^{(k)}(x)|\leqslant(-1)^k g^{(k)}(x)$ при $x>a$, $k=0,1,\dots$*

Доказательство. Условие, очевидно, необходимо. Мы покажем, что оно и достаточно. Рассмотрим операторы Пост—Виддера:

$$F_k(t)=\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right), \quad G_k(t)=\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} g^{(k)}\frac{k}{t}\right).$$

Пусть $E$ — любое измеримое множество интервала $(0, b)$. Мы доказали существование предела

$$\lim_{k\to\infty}\int_E e^{-\alpha t} G_k(t)\,dt \tag{6}$$

при $\alpha > a$. Из этого следует равностепенная абсолютная непрерывность интегралов (6). Из этого, в свою очередь, вытекает равностепенная абсолютная непрерывность интегралов $\int_E e^{-\alpha t} F_k(t)\,dt$, так как они мажорируются интегралами (6). Следовательно, можно подобрать последовательность целых чисел $k_1$, $k_2, \ldots$ так, чтобы

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_E e^{-\alpha t} F_{k_\nu}(t)\,dt \tag{7}$$

существовал при всех ограниченных и измеримых множествах $E$, находящихся в интервале $(0, \infty)$. Обозначим предел (7) через $\int_E R(t)\,dt$. Очевидно, $|R(t)| \leqslant e^{-\alpha t} G(t)$. Мы теперь покажем, что при $x > \alpha$

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xt} e^{\alpha t} R(t)\,dt. \tag{8}$$

Пусть $\varepsilon$ — положительное число. Рассмотрим

$$\Delta = f(x)-\int_0^\infty e^{-xt}e^{\alpha t}R(t)\,dt=\int_0^{k/x}\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}F_k(t)\,dt-\int_0^\infty e^{-(x-\alpha)t}R(t)\,dt.$$

Выберем $b$ достаточно большим, чтобы иметь $\int_b^\infty e^{-xt} G(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Очевидно, при $k > bx$, $x > \alpha$, $k > \frac{x}{x-\alpha}$

$$|\Delta| \leqslant \int_0^b \left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1} e^{\alpha t}\,|e^{-\alpha t}F_k(t)-R(t)|\,dt+\int_0^b\left|\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}-\right.$$

$$\left.-e^{-xt}\right|e^{\alpha t}|R(t)|\,dt+\int_b^{k/x}\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}|F_k(t)|\,dt+\int_b^\infty e^{-(x-\alpha)t}|R(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^b |e^{-\alpha t}F_k(t)-R(t)|\,dt+\int_0^b\left|\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}-e^{-xt}\right|G(t)\,dt+\varepsilon.$$

Из этого получаем, при неограниченном возрастании $k=k_\nu$, что $|\Delta| \leqslant \varepsilon$ и, следовательно, $\Delta=0$. Пользуясь теоремой единственности представления функции в виде (8), заключаем, пренебрегая множеством меры нуль, что $e^{\alpha t}R(t)$ не зависит от выбора $\alpha > a$, чем и заканчивается наше доказательство.

Поступило
23 VIII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bernstein, Acta Math., **52**, 1 (1928). [2] D. V. Widder, Trans. AMS, **36**, 107, (1934). [3] G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, 1937.