ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

НОВАЯ СЕРИЯ

1947

ОТТИСК из т. LVII, № 9

Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 9

МАТЕМАТИКА

Я. А. ТАГАМЛИЦКИЙ

ОБ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ ДИРИХЛЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 1 VIII 1947)

Пусть

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \tag{1}$$

конечная или бесконечная последовательность положительных чисел. В этой заметке мы дадим необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция $f(x)$, определенная при $x > a$, разлагалась в абсолютно сходящийся ряд Дирихле

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{-\lambda_\nu x}.$$

Наше доказательство основывается на следующей теореме: всякая функция $g(x)$ регулярно монотонная при $x > a$, стремящаяся к нулю вместе с $1/x$, удовлетворяет неравенству

$$g'^2(x) - g(x)\,g''(x) \leqslant 0. \tag{2}$$

Этот факт является частным случаем одного важного результата, установленного С. Н. Бернштейном ([1]). Неравенство (2) выражает, что квадратичная форма

$$g(x)\xi^2 + 2g'(x)\xi\eta + g''(x)\,\eta^2$$

не меняет знака, когда ξ и η изменяются.

Лемма 1. *Пусть $g(x) > 0$ регулярно монотонная функция при $x > a$, для которой*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(-1)^k e^{\lambda x} g^{(k)}(x)}{\lambda^k} = B$$

существует и не зависит от k, причем λ — некоторое положительное число. Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция при $x > a$, удовлетворяющая неравенствам

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant (-1)^k g^{(k)}(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

В таком случае существует такое число A, что

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} [f(x) - Ae^{-\lambda x}] \right| \leqslant (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} [g(x) - Be^{-\lambda x}].$$

Доказательство. Неравенство

$$|f^{(k)}(x) e^{\lambda x}| \leqslant (-1)^k g^k(x)\, e^{\lambda x} \tag{3}$$

показывает, что $f^{(k)}(x)e^{\lambda x}$ остается ограниченным при изменении x. Пусть $x_1, x_2, \ldots \to \infty$ такая последовательность чисел, что

$$\lim_{\nu\to\infty} f^{(k)}(x_\nu)\, e^{\lambda x_\nu} = a_k$$

существует. С другой стороны, ввиду того, что функции $g^{(k)}(x) \pm f^{(k)}(x)$ регулярно монотонны и стремятся к нулю вместе с $1/x$, заключаем, что

$$(-1)^k [\lambda^2 (g^{(k)}(x) \pm f^{(k)}(x)) + 2\lambda (g^{(k+1)}(x) \pm f^{(k+1)}(x)) + \\ + g^{(k+2)}(x) \pm f^{(k+2)}(x)] \geqslant 0,$$

и, следовательно,

$$|\lambda^2 f^{(k)}(x) + 2\lambda f^{(k+1)}(x) + f^{(k+2)}(x)| \leqslant \\ (-1)^k [\lambda^2 g^{(k)}(x) \geqslant + 2\lambda g^{(k+1)}(x) + g^{(k+2)}(x)]. \tag{4}$$

Умножая на $e^{\lambda x}$ и применяя результат к $x = x_\nu$, находим

$$|e^{\lambda x_\nu} [\lambda^2 f^{(k)}(x_\nu) + 2\lambda f^{(k+1)}(x_\nu) + f^{(k+2)}(x_\nu)]| \leqslant \\ \leqslant (-1)^k e^{\lambda x_\nu} [\lambda^2 g^{(k)}(x_\nu) + 2\lambda g^{(k+1)}(x_\nu) + g^{(k+2)}(x_\nu)],$$

откуда заключаем, при неограниченном возрастании ν, что

$$\lambda^2 a_k + 2\lambda a_{k+1} + a_{k+2} = 0.$$

Из этого уравнения находим без труда, что

$$(-1)^k a_k = A\lambda^k + A' k \lambda^k.$$

Неравенство (3) дает

$$|A + A'k| \leqslant B \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и, следовательно, $A' = 0$, т. е. $a_k = (-1)^k A\lambda^k$.

С другой стороны, неравенство (4) дает

$$\left| \frac{d^2}{dx^2} e^{\lambda x} f^k(x) \right| \leqslant (-1)^k \frac{d^2}{dx^2} e^{\lambda x} g^{(k)}(x),$$

откуда, интегрируя от x до x_ν, причем $x_\nu > x$, находим

$$\left| \frac{d}{dx} e^{\lambda x} f^{(k)}(x) - [\lambda e^{\lambda x_\nu} f^{(k)}(x_\nu) + e^{\lambda x_\nu} f^{(k+1)}(x_\nu)] \right| \leqslant \\ \leqslant (-1)^{k+1} \left[\frac{d}{dx} e^{\lambda x} g^{(k)}(x) - (\lambda e^{\lambda x_\nu} g^{(k)}(x_\nu) + e^{\lambda x_\nu} g^{(k+1)}(x_\nu)) \right].$$

Пусть теперь ν возрастает неограниченно. После предельного перехода находим:

$$\left| \frac{d}{dx} e^{\lambda x} f^{(x)}(x) \right| \leqslant (-1)^{k+1} \frac{d}{dx} e^{\lambda x} g^{\,k)}(x).$$

Интегрируя еще раз, получаем

$$|e^{\lambda x} f^{(k)}(x) - e^{\lambda x_\nu} f(x_\nu)| \leqslant (-1)^k [e^{\lambda x} g^{(k)}(x) - e^{\lambda x_\nu} g^{(k)}(x_\nu)],$$

и, следовательно,

$$|e^{\lambda x} f^{(k)}(x) - a_k| \leqslant (-1)^k [e^{\lambda x} g^{(k)}(x) - B\lambda^k],$$

или

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} [f(x) - Ae^{-\lambda x}] \right| \leqslant (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} [g(x) - Be^{-\lambda x}].$$

Теорема. *Для того чтобы бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ разлагалась при $x > a$ в абсолютно сходящийся ряд Дирихле, соответствующий последовательности* (1), *необходимо и достаточно, чтобы существовала для $x > a$ функция $g(x)$, разложимая в ряд Дирихле того же типа с неотрицательными коэффициентами*

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu e^{-\lambda_\nu x}$$

так, что

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant (-1)^k g^{(k)}(x) \tag{5}$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство. Условие, очевидно, необходимо. Мы покажем, что оно и достаточно. Очевидно,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(-1)^k g^{(k)}(x)\, e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1^k} = B_1$$

и, следовательно, на основании леммы, существует такое число A_1, что

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} [f(x) - A_1 e^{\lambda_1 x}] \right| \leqslant (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left[g(x) - B_1 e^{-\lambda_1 x} \right] = \sum_{\nu=2}^{\infty} B_\nu e^{-\lambda_\nu x}.$$

Но, очевидно, нашу лемму можно применить еще раз. Продолжая таким образом, индуктивно устанавливаем существование чисел

$$A_1,\ A_2, \ldots, A_n,$$

для которых

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} \left[f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu e^{-\lambda_\nu x} \right] \right| \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{\infty} B_\nu \lambda_\nu^k e^{-\lambda_\nu x}.$$

Пусть теперь n неограниченно возрастает. Выбирая $k = 0$, заключаем, что ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{-\lambda_\nu x}$ абсолютно сходится при $x > a$ и что сумма его равна $f(x)$.

Рассуждения сохраняют свою силу и в случае, когда последовательность (1) конечна. Тогда $f(x)$ обращается в экспоненциальный полином

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu e^{-\lambda_\nu x},$$

где m — число членов последовательности (1). В специальном случае, когда последовательность (1) содержит только один член, функция $f(x)$ обращается в показательную функцию $Ae^{-\lambda x}$. Этот результат мы установили недавно другим путем ([2]).

Наша теорема сохраняет силу и в том случае, если предположить, что функция $f(x)$ удовлетворяет неравенствам (5) только для бесчисленного множества значений k (а не для всех целых неотрицательных значений) $k=k_1, k_2, \ldots$, но что существует такая последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots \to 0$, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} f(\xi_\nu)=0$.

Мы докажем при этих предположениях, что неравенства (5) выполнены при всех целых неотрицательных значениях k. Это вытекает из следующей элементарной леммы.

Лемма 2. *Предположим, что функция $\varphi(x)$ и ее n первых производных $\varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ существуют при $x>a$ и $\varphi^{(n)}(x)$ непрерывна и не меняет знака.*

Если существует последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots \to\infty$ такая, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varphi(\xi_\nu)=0$, то выражение $(-1)^k\varphi^{(k)}(x)$ сохраняет постоянный знак при $0\leqslant k\leqslant n$, когда x и k изменяются.

Доказательство. Можно найти такие последовательности $x_{k1}, x_{k2}, \ldots \to 0$, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varphi^{(k)}(x_{k\nu})=0$. Для этого достаточно выбрать частичную последовательность $x_{01}, x_{02}, \ldots$ из (6), для которой $x_{0,\nu}-x_{0,\nu-1}\geqslant 1$, и подобрать последовательности $x_{k1}, x_{k2}, \ldots$ так, чтобы

$$\varphi^{(k-1)}(x_{k-1,2\nu})-\varphi^{(k-1)}(x_{k-1,2\nu-1})=(x_{k-1,2\nu}-x_{k-1,2\nu-1})\,\varphi^{(k)}(x_{k,\nu}).$$

С другой стороны,

$$\varphi^{(k-1)}(x)-\varphi^{(k-1)}(x_{k-1,\nu})=-\int\limits_x^{x_{k-1,\nu}}\varphi^{(k)}(t)\,dt.$$

Если $\varphi^{(k)}(t)$ не меняет знака, то можем, очевидно, писать

$$\varphi^{(k-1)}(x)=-\int\limits_x^{\infty}\varphi^{(k)}(t)\,dt$$

и, следовательно, $\varphi^{(k-1)}(x)$ также не меняет знака, когда x изменяется.

Чтобы установить, что неравенства (5) выполнены при всех целых неотрицательных значениях k, если они выполнены при $k=k_1, k_2, \ldots$ и если $\lim\limits_{\nu\to\infty} f(\xi_\nu)=0$, достаточно применить лемму 2 к сумме и разности $g(x)\pm f(x)$, так как $\lim\limits_{\nu\to\infty} g(\xi_\nu)=0$, что видно из

$$g(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu e^{-\lambda_\nu x},$$

где числа λ_ν положительны. Можно притти к тому же результату, используя одну теорему Н. Обрешкова ([3]) вместо леммы 2.

Поступило
3 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bernstein, Atti Congr. Bologna, **2**, 267 (1928). [2] J. Tagamlitzki, C. R., **223**, 940 (1946). [3] N. Obrechkoff, C. R., **223**, 397 (1946).