Редукционна формула за изразяване симетричните интеграли от k-ти ред със симетрични интеграли от $k-1$-ви ред

Нека V е отворено множество в R^{n+k}

Разглеждаме следното многообразие, дефинирано с равенства и неравенства

$$\Gamma: \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0 \\ \dots\dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0 \\ G_1(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) \geq 0 \\ G_2(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) \geq 0 \\ \dots \\ G_s(x_1, x_2, x_3 \dots x_{n+k}) \geq 0 \end{cases}$$

искаме многообразието, дефинирано само с равенствата да бъде затворено многообразие и неравенства графика да бъде подмножество на V.

Нека съвкупността от точки на V, които удовлетворяват написаните $n+s$ условия бъде компактно множество. Самото многообразие и неравенства графика означаваме с Γ. Нека функциите $F_1, F_2 \dots F_n, G_1, G_2 \dots G_s$ притежават непрекъснати частни производни поне от първи ред в/в V. Да вземем и положим

$G_\alpha(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0$ Получаваме ново многообразие, което наричаме стена на Γ с номер α. Означаваме това многообразие с Γ_α. За това многообразие искаме да бъдат изпълнени условията, при които дефинираме понятието симетричен интеграл.

$$\Gamma_\alpha \begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \\ \dots \\ F_n = 0 \\ G_\alpha = 0 \end{cases}$$

(Заслужава да отбележим, че Γ_α дефинираме само с равенства. Искаме Γ_α да бъде затворено гладко многообразие без особени точки.)

Но всяко затворено подмножество на едно компактно множество е компактно множество. Следователно всяко

стена е компактно множество. Нека φ е функция, дефинирана и непрекъсната върху множеството Γ. Щом Γ е компактно множество и φ е непрекъсната, можем да образуваме $T_\Gamma(\varphi)$. Да пресметнем симетричния интеграл от тая непрекъсната функция относно множеството Γ в общия случай не можем. Но ако φ е едни сигурна функционална детерминанта, за която вече стана дума по-долу, то за такъв симетричен интеграл разполагаме с една редукционна формула.

Нека разгледаме следната функционална детерминанта

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3 \dots F_n, P_1, P_2 \dots P_k)}{D(x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1} \dots x_{n+k})}$$

$F_1, F_2, \dots F_n$ – функциите, участващи в уравненията на Γ.
$P_1, P_2, \dots P_k$ – произволни функции, дефинирани във V и притежаващи непрекъснати частни производни поне от първи ред във тая околност.

Следователно можем да образуваме

$$T_\Gamma\left(\frac{D(F_1, F_2, \dots F_n, P_1, P_2 \dots P_k)}{D(x_1, x_2, \dots x_{n+k})}\right)$$ – симетричен интеграл от k-ти ред.

Тоя интеграл се редуцира на симетрични интеграли от $k-1$-ви ред по следния начин:

$$T_\Gamma\left(\frac{D(F_1, F_2, \dots F_n, P_1, P_2 \dots P_k)}{D(x_1, x_2, \dots x_{n+k})}\right) = -\sum_{l=1}^{s} T_{\Gamma_l}\left(P_1 \frac{D(F_1, F_2 \dots F_n G_l P_2 \dots P_k)}{D(x_1, x_2, \dots x_{n+k})}\right)$$

(тук върху една стена изнасяме едно множител, но върху друга не сме длъжни да изнасяме непременно същия множител)

Какво значи симетричен интеграл върху Γ_l не знаем, защото всяка стена е компактно множество. Освен това T_{Γ_l} – симетричен интеграл от $k-1$-ви ред.

Нека казано е написана обаче, тая формула не е вярна. Защо не е вярна?

За доказване на написаното отъждествяване и неравенства Γ чрез неравенството $G_l \geq 0$ трябвало на Γ не се изменя, т.е. интегрираната област остава непроменена. Следователно симетричния интеграл $T_\Gamma\left(\frac{D(F_1, F_2 \dots F_n, P_1, P_2 \dots P_k)}{D(x_1, x_2 \dots x_{n+k})}\right)$ остава непроменен.

Защо остава обаче без промяна написаното в дясната част на равенството? Обединяемите области $S+1$. Ако обединяемото, съответстващо на Γ_l не е 0, написаната формула не е вярна. Ако наложим обаче още едно допълнително условие върху Γ, формулата ще бъде вярна. Да си мислим графиката на една от стените и друга стена. Симетричния интеграл знаем, че е един линеен и позитивен функционал. Какво значи една съвкупност от точки относно разглежданата позитивен функционал да има мярка 0 не знаем. Ако сечението на всеки две стени е съвкупност с мярка 0, относно симетричните интеграли, които се определят от тия стени, то в такъв случай написаната формула е вярна.

Защо ние имаме нужда от симетричните интеграли въобще? Защо разглеждаме тая редукционна формула?

Пример: Да вземем в равнината точкова съвкупност, определена от едно неравенство $G(x,y) \geq 0$. Нека G е достатъчно хубава функция. В общия случай, множеството от точки, които удовлетворяват G е една сложна точкова съвкупност. Нека $\varphi(x,y)$ е непрекъсната функция на две променливи. Да образуваме $\iint_M \varphi(x,y)\,dx\,dy$. Как ние

Пресмятане тоя обикновен двоен интеграл?

1) Или редуциране тоя интеграл на два интеграла (в тоя случай се иска дефиниционната област да бъде криволинеен трапец)

2) Или правим смяна на променливите

В общия случай b не е криволинеен трапец и да се разлиши на криволинейни трапези (да се приведе в нормален вид не може даже ако b е полином на x)

Да си мислим частен случай, в който

$$\varphi(x,y) = \begin{vmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{vmatrix} \qquad \iint_M \varphi(x,y)\,dx\,dy = \iint_M \begin{vmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{vmatrix} dx\,dy$$

– симетричен интеграл върху тоя многоъгълник

За тоя симетричен интеграл можем да приложим нашата редукционна формула ($G(x,y)=0$ – нашето многоъгълник ръбове и формулата е приложима)

$$\iint_M \begin{vmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{vmatrix} dx\,dy = -T_{\Gamma_1}\left(P \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}\right)$$

В първоначалната формулировка на задачата не стои нищо и дума за симетрични интеграли, но в процеса на нейното решаване се появи симетричен интеграл.

Може да се случи симетричния интеграл да можем да пресметнем (например ако е на лице тривиално предсказуемо, за което стана дума в финалната лекция)

Нека P е такава функция, че върху контурите на областите тя е константа. Например ако това е кръг, и нашето е: $x^2+y^2-r^2 \le 0$ или $r^2-x^2-y^2 \ge 0$. Разгл. $f(t)$. Нека $t = x^2+y^2$. Да образуваме $f(x^2+y^2)$. По контура $f(x^2+y^2) = f(r^2) = const$

Следователно предполагаме, че $P = const$ в/у G_1.

$$\iint_M \begin{vmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{vmatrix} dx\,dy = -T_{\Gamma_1}\left(P \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix}\right) \underset{\text{обл. линейности на } T}{=} -P\,T_{\Gamma_1}\left(\begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix}\right) = 0$$

По симетричния интеграл от функционалната детерминанта можем да редуцираме на сума от симетрични интеграли върху отсечките на многоъгълника. По тъй като нямаме точки от стени, стойностите на последния интеграл са 0.

По такъв начин видяхме, че имаме задачи за обикновени интеграли, които водят до симетрични интеграли.

Заслужава да отбележим, че разглежданата редукционна формула е валидна и в случаите $n=0$ и $k=0$

а) В случая $n=0$ тези ниво видяхме са обикновените Риманови интеграли.

б) $k=0$ $\quad T(\varphi) \overset{\text{no def}}{=} \sum A_n \varphi(x^{(n)})$

Константите A_i могат да бъдат избрани такъв, че разглежданата редукционна формула да бъде вярна и при $k=0$.

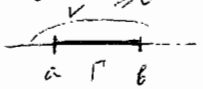
Вторро е друг важен частен случай

От редукционната формула

Нека е даден крайния и затворен интервал $a \le x \le b$

$x - a \ge 0$

$b - x \ge 0$



Пространството, което разглеждаме е R^1, а графиката на многообразието е интервала Γ

Съгласно редукционната формула

$$T_\Gamma\left(\frac{D(P)}{D(x)}\right) = T_\Gamma(P'(x)) = -T_{\Gamma_1}\left(P\,\frac{D(x-a)}{D(x)}\right) - T_{\Gamma_2}\left(P\,\frac{D(b-x)}{D(x)}\right) = -T_{\Gamma_1}(P) + T_{\Gamma_2}(P)$$

$\Gamma_1: x-a=0$
$\Gamma_2: x-b=0$ } нула точки x, които лежат на тези две стени едновременно и следователно в тоя случай редукционната формула можем да приложим

Но в случая $n=0$ симетричния интеграл ние дефинирахме като обикновен Риманов интеграл. Върху стените и ъглите $k=0$ бързо се дефинират в тоя случай

$$\boxed{\int_a^b P'(x)\,dx = -A\,P(a) + B\,P(b)}$$ това не е нищо друго, освен познатата на формула на Лайбниц и Нютон.

Остана да пресметнем $A>0$ и $B>0$

Ръзбираме така, че ясно да можем да пресметнем интеграла

$P = 1$ $\qquad$ $P = x$

$0 = -A+B$ $\qquad$ $b-a = -Aa + Bb$

Решаваме така получената система относно A и B

Получаваме $A = B = 1$. Следователно

$$\boxed{\int_a^b P'(x)\,dx = P(b) - P(a)}$$

По такъв начин видяхме, че редукционната формула, която разглеждаме е едно обобщение на формулата на Лайбниц и Нютон и подобно на нея може да се използва за пресмятане на интеграли. Това обаче не са единствените приложения на тая формула (успех тя може да се използва и за други цели.

Ние обаче можем да обобщим не само формулата на Лайбниц и Нютон, но можем да обобщим и формулата за интегриране по части.

$$\Gamma\left|\begin{array}{l} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \\ \dots \\ F_k = 0 \\ G_1 \geq 0 \\ G_s \geq 0 \end{array}\right. \qquad T_\Gamma\left(\frac{D(F_1, F_2 \dots F_n, P_1, P_2 \dots P_k)}{D(x_1, x_2, \dots x_{n+k})}\right) = -\sum T_{\Gamma_\alpha}\left(P_1 \frac{D(F_1, F_2 \dots F_n G_\alpha P_2 \dots P_k)}{D(x_1, x_2, \dots x_{n+k})}\right)$$

Вместо P_1 в тая формула поставяме $P_1 = PQ$

$$\frac{\partial PQ}{\partial x_\lambda} = P\frac{\partial Q}{\partial x_\lambda} + Q\frac{\partial P}{\partial x_\lambda}$$

$$T_\Gamma\left(P\frac{D(F_1, F_2 \dots F_n Q P_2 \dots P_k)}{D(x_1, x_2, \dots x_{n+k})}\right) + T_\Gamma\left(Q\frac{D(F_1, F_2 \dots F_n P P_2 \dots P_k)}{D(x_1, x_2, \dots x_{n+k})}\right) =$$

$$= -\sum T_{\Gamma_\alpha}\left(PQ\frac{D(F_1, F_2 \dots F_n G_\alpha P_2 \dots P_k)}{D(x_1, x_2 \dots x_{n+k})}\right)$$

Така получената формула за интегриране по части може да се използва за пресмятане на обикновени и симетрични интеграли.

Обобщение на понятието затворен път от трети ред

Тук ще покажем как се обобщава понятието затворен път, за да можем да говорим за затворен път от многообразия.

Интересуваме се само от път, контура на който е многообразие и обобщението ще направим само за такъв път.

Ще казваме, че една система от многообразия $\Gamma_1, \Gamma_2 \dots \Gamma_s$ представлява затворен път от многообразия, ако съществува такова многообразие Γ, за което тия многообразия съставляват точно системата от неговите стени.

Нека Γ е многообразие, оставено от многообразия Γ_s и са налице условията, при които е вярна редукционната формула. Полагаме $P_1 = 1$. От формулата получаваме

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{s} T_{\Gamma_\alpha}\left(\frac{D(F_1, F_2 \dots F_n G_\alpha P_2 \dots P_k)}{D(x_1, x_2 \dots x_{n+k})}\right)$$ – сумата от симетрични интеграли на тия детерминанти е 0.

Тая формула, подобно на аналогичната формула за криволинейни интеграли може да се използва за пресмятане на интеграли. Това обаче не е единственото, за което могат да се използват тия две формули. Сега ще направим едно красиво приложение на теоремата на симетричните интеграли, като докажем известната теорема на Уравуер. Нейната формулировка ясно разбираема, но още в двуизмерния случай тая теорема не е тривиална.

Теорема на Брауер

Нека R^n е пространство с краен брой измерения.
Нека в това пространство е дадена сфера с краен радиус r
$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \le r^2$
Нека $f(x)$ е непрекъсната функция, дефинирана в тази сфера, чиито стойности пак принадлежат на сферата.
Твърди се, че съществува поне една неподвижна точка, т.е съществува поне една точка x_0 от сферата, такава, че $f(x_0) = x_0$

Преди да докажем теоремата на Брауер ще докажем една спомагателна теорема от вариационното смятане, която ще използваме при доказателството теоремата на Брауер.

- Теорема: Нека в крайния и затворен интервал $[a, b]$ е дадена непрекъсната функция $\varphi(x)$.
Нека за всяка диференцируема функция $p(x)$, която притежава непрекъсната първа производна $p'(x)$ и за която $p(a) = p(b) = p(a)$ интегралът $\int_a^b p'(x)\varphi(x)dx = 0$
Дали има функции $\varphi(x)$, удовлетворяващи тия условия?
Нека $\varphi(x) = C = const$ $\int_a^b p'(x) C\, dx = C[p(b) - p(a)] = 0$
Теоремата твърди, че други функции с това свойство, освен константите няма.

Доказателство:

Формулировката може малко да се обобщи.
Слер изваждане на $\int_a^b p(x)\varphi(x)dx = 0$ и $\int_a^b p'(x)C\,dx = 0$ ще получим $\int_a^b p'(x)[\varphi(x) - c]\,dx = 0$. Да докажем сега теоремата.
Избираме функцията $p(x)$ по следния начин
$p(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt$. В точката $\underline{a}$ тая функция е анулира

а в $\underline{b}$ може да не се анулира. Разглеждаме функцията $p(x) = \int_a^x \varphi(t)dt - \lambda(x-a)$, където λ е избрано така, че тая функция да се анулира в точката $\underline{b}$. Освен това лесно се вижда, че тя се анулира и в точката $\underline{a}$. Да определим λ.

$$0 = p(b) = \int_a^b \varphi(t)dt - \lambda(b-a)$$

$$p'(x) = \varphi(x) - \lambda$$

$$\lambda = \frac{\int_a^b \varphi(t)dt}{b-a}$$

Така избраната функция $p(x)$ удовлетворява всички условия в теоремата

$\int_a^b (\varphi(x) - \lambda)(\varphi(x) - C)\,dx = 0$ при произволен избор на C съгласно предположенията на теоремата.

Но специално това равенство е вярно и при $C = \lambda$
$\int_a^b (\varphi(x) - \lambda)^2\,dx = 0$ за всяко $x \in [a, b]$ Следователно $\varphi(x) = \lambda = const$ а C това лемата е доказана. Тя се използва в вариационното смятане.

Да докажем сега теоремата на Брауер.
Без ограничение на общността можем да предполагаме, че дадената сфера е единична. Нека $f(x)$ е непрекъсната функция, дефинирана в единичната сфера $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \le 1$ на R^n и нека стойностите на тая функция принадлежат пак на сферата, т.е $|f(x)| \le 1$ за всяка точка x от сферата
$x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ Трябва да докажем, че има поне една неподвижна точка, т.е съществува точка x от сферата, такава, че $f(x) = x$

Доказателство.

1. Предполагаме, че $f(x)$ притежава непрекъснати частни производни спрямо всичките си аргументи поне от 1 ред в някое множество, което съдържа тая сфера.
$f(x) = (f_1, f_2, \dots f_n)$ – стойностите на функцията $f(x)$ са точки от n-мерното пространство.

Функциите

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots x_n) \\ \dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots x_n) \end{array}\right\}$$

сами са числови функции (искаме тия функции да бъдат дефинирани в околността и да притежават непрекъснати частни производни поне от 1 ред в нея спрямо всичките аргументи (ф-ята $f(x)$ да имат непрекъснати частни производни означава $f_1, f_2, \dots f_n$ да имат непрекъснати частни производни.) Допускаме, че неподвижна точка няма. Нека x е произволна точка от сферата. Съгласно нашето допускане $f(x) \neq x$. Следователно двете точки $f(x)$ и x определят права. Разглеждаме лъча от $f(x)$ към x и го продължаваме до пресичането му със сферата. Пресечната точка на тоя лъч със сферата означаваме с $g(x)$ (по-късно ще докажем, че функцията $g(x)$ притежава непрекъснати частни производни.) Освен това функцията $g(x)$ притежава следните две свойства, които ще използуваме:

1) $g(x)$ е точка от сферата, т.е $|g(x)| = 1$
Ако означим $g = (g_1, g_2, \dots g_n)$, то: $g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_n^2 = 1$
2) Ако x лежи върху сферата, т.е $|x| = 1$, то $x \equiv g(x)$

Въвеждаме спомагателна функция h, която дефинираме по следния начин: $h = x + t(g - x)$
$h = (h_1, h_2, \dots h_n)$ $\quad h = h(t)$

Образуваме интеграла върху сферата S от следната функционална детерминанта:

$$I(t) = \underbrace{\int \dots \int}_{n\text{ пъти}}_{S} \frac{D(h_1, h_2, \dots h_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n)}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

Нашата главна цел е да докажем, че тая функция на t, $I(t)$ от t не зависи. Ако успеем да направим това, противоречието ще бъде установено, защото както лесно се вижда $I(0) \neq 0$, а $I(1) = 0$

$I(0) = ?$ $\qquad h = x = (x_1, x_2, \dots x_n)$

$$I(0) = \underbrace{\int \dots \int}_{n\text{ пъти}}_{S} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} dx_1\, dx_2 \dots dx_n \neq 0$$

– това е обема на сферата – положително число.

Следователно $I(0) \neq 0$

$I(1) = ?$ $\qquad h = g = (g_1, g_2 \dots g_n)$

$$I(1) = \int \dots \int_S \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

Но функцията g удовлетворява равенството:
$g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_n^2 = 1$ Диференцираме това равенство спрямо x_i $(i = 1, 2, \dots n)$ и получаваме системата от равенства:

$$\begin{cases} g_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + g_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \dots + g_n \frac{\partial g_n}{\partial x_1} = 0 \\ g_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + g_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \dots + g_n \frac{\partial g_n}{\partial x_2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + g_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_n} + \dots + g_n \frac{\partial g_n}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

Това е една линейна и хомогенна система относно $g_1, g_2 \dots g_n$. Ако фиксираме една точка x от сферата, получаваме $g = (g_1, g_2 \dots g_n)$. Поне едно от тия $g_1 \dots g_n$ е различно от 0, т.е за тая точка системата притежава нетривиално решение

Следователно детерминантата на тая система има стойност 0. Но детерминантата на системата е точно функционалната детерминанта $\frac{D(J_1, J_2 \dots J_n)}{D(x_1, x_2 \dots x_n)}$

Следователно тая детерминанта е 0.

Следователно $J(1) = 0$

Следователно, ако съумеем да докажем, че $J(t)$ от t не зависи, всичко ще бъде свършено.

Означаваме $F(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$ $\quad F(x) \geq 0$

Искаме $x_1, x_2, \dots x_n$ да удовлетворяват това неравенство, а t да удовлетворява неравенствата $0 \leq t \leq 1$

Получаваме една система от неравенства

$$\Gamma \left| \begin{array}{l} F \geq 0 \\ t \geq 0 \\ 1-t \geq 0 \end{array} \right.$$

В пространство с $n+1$ измерения разглеждаме множеството от точки $(x_1, x_2 \dots x_n, t)$, определени от тия неравенства. Това е едно многообразие, дефинирано само с неравенства.

Нека P е произволна (достатъчно хубава функция)

Как избираме P ще кажем по-късно.

Обхождаме симетричния интеграл от следната функционална детерминанта (за която да приложим нашата редукционна формула)

$$T_\Gamma \left(\frac{D(P, h_1, h_2 \dots h_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n, t)} \right) \quad (1)$$

Понеже в Γ равенства няма, това не е нищо друго, освен обикновен Риманов интеграл разпространен върху разглежданото множество (съгласно дефиницията на симетричен интеграл върху многообразие, дефинирано без равенства)

Следователно

$$T_\Gamma \left(\frac{D(P, h_1, h_2, \dots h_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n, t)} \right) = \int \dots \int_\Gamma \frac{D(P, h_1, h_2, \dots h_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n, t)} dx_1 dx_2 \dots dx_n dt$$

Последния интеграл разлагаме на два интеграла – интеграл от n-кратен интеграл. Получаваме:

$$T_\Gamma \left(\frac{D(P, h_1, h_2 \dots h_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n, t)} \right) = \int_0^1 \left[\int \dots \int_S \frac{D(P, h_1, h_2 \dots h_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n, t)} dx_1 dx_2 \dots dx_n \right] dt$$

Да разгледаме

$$\int \dots \int_S \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_1} & \frac{\partial P}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial P}{\partial x_n} & \frac{\partial P}{\partial t} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} & \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \frac{\partial h_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} & \frac{\partial h_n}{\partial t} \end{vmatrix} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Функцията P можем да изберем произволно (стига да е достатъчно хубава.) Ако P изберем такъв, че да зависи само от t, горният ред ще се опрости. Всички елементи ще бъдат 0 с изключение на последния елемент.

При направения избор на функцията P можем да пишем:

$$\int \dots \int_S \frac{D(P, h_1, h_2 \dots h_n)}{D(x_1, x_2 \dots x_n, t)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = (-1)^n P'(t) \underbrace{\int \dots \int_S \frac{D(h_1 \dots h_n)}{D(x_1 \dots x_n)} dx_1 \dots dx_n}_{J(t)}$$

$$= (-1)^n P'(t) J(t)$$

Следователно

$$(-1)^n \int_0^1 P'(t) J(t) dt = T_\Gamma \left(\frac{D(P, h_1, h_2 \dots h_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n, t)} \right)$$

Ако се затъмнем със симетричния интеграл, стоящ в дясната част на последното равенство. Това е симетричен интеграл от една функционална детерминанта. За него можем да приложим редукционната формула (Многообразието равенства няма – не се изисква в тая функционална детерминанта да участвуват функции от равенствата на многообразието. Горните функции могат да бъдат произволни но достатъчно хубави. Единият от стените е $F=0$, другата $t=0$ и третата $1-t=0$) лесно се вижда, че всички условия за приложи

редукционната формула се намуе. Съгласно тая формула

$$T_\Gamma\left(\frac{D(P,h_1,h_2\dots h_n)}{D(x_1,x_2,\dots x_n,t)}\right) = -T_{\Gamma_1}\left(P\,\frac{D(F,h_1,h_2\dots h_n)}{D(x_1,x_2,\dots x_n,t)}\right) - T_{\Gamma_2}\left(P\,\frac{D(t,h_1,h_2\dots h_n)}{D(x_1,x_2\dots x_n,t)}\right)$$

$$- T_{\Gamma_3}\left(P\,\frac{D(1-t,h_1,h_2\dots h_n)}{D(x_1,x_2,\dots x_n,t)}\right)$$

Да намерим първата детерминанта по-подробно:

$$\frac{D(F,h_1,h_2\dots h_n)}{D(x_1,x_2,\dots x_n,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} & \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \frac{\partial h_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} & \frac{\partial h_n}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Интересува ни поведението на тази функция върху стената Γ_1: $F=0$. Имаме следното:

$\frac{\partial h_\nu}{\partial t} = g_\nu - x_\nu$. Когато x е върху сферата, т.е. при $F=0$ имаме $x = g(x)$, откъдето $x_\nu = g_\nu$ и следователно $\frac{\partial h_\nu}{\partial t} = 0$

F от t не зависи. Следователно $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$

Следователно всички елементи на последния стълб на разглежданата детерминанта са нули. Следователно

$$T_{\Gamma_1}\left(P\,\frac{D(F,h_1\dots h_n)}{D(x_1,x_2\dots x_n,t)}\right) = 0$$ в тоя случай.

Нека $P(0)=0$. Искаме да намерим стойността на P върху стената $t=0$. Имаме $P=0$.

Тогава $T_{\Gamma_2}\left(P\,\frac{D(t,h_1,h_2\dots h_n)}{D(x_1,x_2\dots h_n,t)}\right) = 0$

Нека $P(1)=0$. Тогава $T_{\Gamma_3}\left(P\,\frac{D(1-t,h_1,h_2\dots h_n)}{D(x_1,x_2,\dots x_n,t)}\right) = 0$

Окончателно при направените допълнителни предположения за функцията P имаме

$$T_\Gamma\left(\frac{D(P,h_1,h_2\dots h_n)}{D(x_1,x_2\dots x_n,t)}\right) = 0$$

Т.е. разглежданият интеграл е равен на $(-1)^n\int_0^1 P'(t)\,J(t)\,dt$. Съгласно доказаната лема от вариационното смятане можем да твърдим, че $J(t)=\text{const}$, т.е. $J(t)$ от t не зависи. С това теоремата на Краузер в тоя частен случай е доказана.

В доказателството на тоя случай съществено използвахме, че функцията h притежава непрекъснати частни производни спрямо всичките си променливи. За да твърдим обаче, че h притежава непрекъснати частни производни поне от I ред, достатъчно е да знаем, че $g(x)$ притежава непрекъснати частни производни поне от I ред (вж. дефиницията на h). Ще докажем, че щом f притежава непрекъснати частни производни поне от I ред спрямо всичките си променливи, то и $g(x)$ притежава такива. За целта ще изчислим функцията $g(x)$ и ще видим дали тя притежава непрекъснати частни производни.

$$\left.\begin{aligned} g &= f + S(x-f) \\ 0 &\le S \end{aligned}\right\}$$ това е точка от лъча

При $S=0$ – точката f } точки от лъча

При $S=1$ – точката x

Търсим точка S, която да удовлетворява това условие и за която $|g|=1$, т.е. $(g,g)=1$ – скал. произв.

$(g,g) = (f,f) + 2S(f,x-f) + S^2(x-f,x-f) = 1$

– получаваме квадратно уравнение за S.

Това квадратно уравнение е истинско, защото $x - f(x) \neq 0$ – функцията f няма неподвижна точка. Изяснено начето допускане.

$(f,f) \leq 1 \qquad (x,x) \leq 1 \qquad S = S(x)$

Да решим това квадратно уравнение спрямо S. Относно S то има 2-ма корена. Да вземем за S неотрицателното решение на уравнението

$$S = \frac{-(f, x-f) \oplus \sqrt{(f, x-f)^2 + (1-(f,f))(x-f, x-f)}}{(x-f, x-f)}$$

Че тоя корен в реалната област има смисъл – това е очевидно. Че $S = S(x)$ е непрекъсната функция на x – това също е очевидно. Ако успеем да покажем, че S има непрекъснати частни производни спрямо всяка една от променливите $x_1, x_2, \dots x_n$, с това всичко ще бъде свършено, защото оттук автоматически следва, че $g = f + S(x-f)$ притежава непрекъснати частни производни спрямо всяка една от тия променливи. (Функцията $\sqrt{u}$ е дефинирана при $u \geq 0$, но в точката 0 тя няма производна.) Трябва да покажем, че подкоренната величина в израза за S не се анулира. Оттук ще следва, че $S = S(x)$ има непрекъснати първи частни производни спрямо всичките си променливи.

Да допуснем, че подкоренната величина е 0.

Понеже $x \neq f(x)$, то $(x-f, x-f) \neq 0$. Сега това $(f,f) \leq 1$. Следователно $(f, x-f) = 0$ и $1-(f,f) = 0$, т.е. $\boxed{(f,f)=1}$

Оттук $(f,x) - (f,f) = 0$, но $(f,f) = 1 \Rightarrow \boxed{(f,x) = 1}$

От неравенството на Коши имаме:

$(f,x)^2 \leq (f,f)(x,x) \leq 1$. Но $(f,x) = 1$ и $(f,f) = 1$.

Следователно $\boxed{(x,x) = 1}$. Следователно в неравенството на Коши имаме равенство. Това е възможно само когато f и x са линейно зависими. (съществуват λ и μ: $\lambda f + \mu x = 0$ поне едно от λ и μ е отлично от 0)

Нека $\lambda \neq 0$ например. Тогава $f = \rho x$ ρ – положително.

$(f,x) = (\rho x, x) = \rho(x,x) = \rho \cdot 1 = 1$. Следователно $\boxed{\rho = 1}$

Следователно $f = x$. Но $f \neq x$ (по предположение f няма неподвижни точки). Следователно сме допуснали, че подкоренната величина се анулира – достигнахме до противоречие. Следователно $S = S(x)$ има непрекъснати частни производни. Следователно $g(x)$ има непрекъснати частни производни. (Понеже стойностите на функцията $g(x)$ са точки от R^n, последното означава, че координатите на $g(x)$, които са числови функции на $x_1, x_2 \dots x_n$ притежават непрекъснати частни производни спрямо тия променливи)

За така определената функция $g(x)$ трябва да знаем, че:

а) $|g| = 1$, т.е. $g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_n^2 = 1$

б) Ако $|x| = 1$, то $g(x) = x$

Геометричните свойства тук не можем да използуваме.

Ние S дефинирахме като положителното решение на уравнението $(f,f) + 2S(f, x-f) + S^2(x-f, x-f) = 1$

Дали такова положително решение всъщност винаги съществува?

$$S^2 \underbrace{(x-f, x-f)}_{+} + 2S(f, x-f) - (1-(f,f)) = 0$$

Ако свободния член е различен от 0, корените имат различни знаци и следователно имаме положителен корен. В тоя случай за S вземаме тоя корен.

Ако свободния член на уравнението е 0, то

$$S = -\frac{2(f, x-f)}{(x-f, x-f)} = 2\frac{(f,f)-(x,f)}{(x-f, x-f)}$$

Числено неравенството на Коши $(x,f)^2 \le (f,f)(x,x) \le 1$
Ако $(f,f)=1$, то $(x,f) \le (f,f)$ и следователно $(f,f)-(x,f) \ge 0$.
Следователно $S \ge 0$. Но когато свободния член на квадратното у-ние е 0, един от корените е 0. Сега тови видяхме, че това у-ние няма двоен корен (подкоренните величина в израза за S не се нулира.) Следователно и в тоя случай другия корен на това у-ние е положителен. За S ние вземаме положителния корен. Следователно S е единственото положителен корен на разглежданото квадратно уравнение.

Сега ще докажем, че $|g|=1$ (това условие е изпълнено, защото S е избрано така, че да бъде изпълнено условието $(g,g)=1$)

Остава да видим, че ако $|x|=1$, то $g(x)=x$

Да разглеждаме равенството $g = f + S(x-f)$. Нека $S=1$. Тогава $x = f + 1.(x-f)$. Ако е изпълнено това условие $\Rightarrow$ $(x,x)=1$ (защото по предположение $|x|=1$) Повдигайки в квадрат $x = f + 1(x-f)$ получаваме, че 1 е корен на уравнението $S^2(x-f, x-f) + 2S(f, x-f) - (1-(f,f)) = 0$.
S е също положителен корен на общото у-ние.
Но това уравнение притежава единствено положително решение. Следователно $S=1$ и $g=x$. С това исканото свойство е доказано.

II - Нека $f(x)$ е произволна непрекъсната функция. $|f(x)| \le 1$ $\quad x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 \le 1$ Ще докажем, че съществува точка x, такава че $f(x)=x$
$f=(f_1, f_2, \dots f_n)$
Ще използуваме теоремата на Вайерщрас - Стоун
Тя се отнася за функции, приемащи само числови стойности. Тая теорема прилагаме за координатите на f

Избираме произволно $\varepsilon > 0$
Апроксимираме равномерно с полиноми P_1, така че $|f_1 - P_1| < \varepsilon$. Апроксимираме равномерно с полиноми $P_2 \dots P_n$.
$|f_2 - P_2| < \varepsilon$ Сферата е компактно множество,
$|f_n - P_n| < \varepsilon$ полиномите образуват алгебри, които отделя точките и не се нулират, f_i $(i=1,2,\dots n)$ са непрекъснати функции. Следователно теоремата на Вайерщрас - Стоун можем да приложим.
Да разгледаме $P_1^2+P_2^2+\dots+P_n^2$

$$|P_\nu| - |f_\nu| \le |f_\nu - P_\nu| < \varepsilon \qquad |P_\nu| \le |f_\nu| + \varepsilon \qquad |f_\nu| \le \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu^2} \le 1$$

$$P_1^2+P_2^2+\dots+P_n^2 \le \sum_{\nu=1}^{n} (|f_\nu|+\varepsilon)^2 = \sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu|^2 + 2\varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu| + \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon^2$$

$\le 1 + 2n\varepsilon + \varepsilon^2 n$ Понеже $n \le n^2$, имаме
$\sqrt{P_1^2+P_2^2+\dots+P_n^2} \le 1 + n\varepsilon$
Означаваме с $Q = (Q_1, Q_2, \dots Q_n)$ функцията, дефинирана в единичната сфера по следния начин:

$$Q = \left(\frac{P_1}{1+n\varepsilon}, \frac{P_2}{1+n\varepsilon}, \dots \frac{P_n}{1+n\varepsilon}\right)$$

(това е функция, дефинирана в цялото пространство, следователно тя е дефинирана и в сферата)
Ако $|x| \le 1$, то $|Q| = \sqrt{(Q,Q)} \le \dfrac{\sqrt{P_1^2+P_2^2+\dots+P_n^2}}{1+n\varepsilon} \le 1$

Следователно, ако $|x| \le 1$, то $|Q| \le 1$
Следователно функцията Q изразява единичната сфера в някоя нейна подвъвкупност. За Q можем да приложим теоремата, която доказахме (вж. I случай) Следователно Q има неподвижна точка $Q(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$ $\quad (x_\varepsilon, x_\varepsilon) \le 1$
Нека на ε дадем стойност $\frac{1}{m}$ $\quad m$ - цяло положително число
$Q(x_m) = x_m$ $\quad Q$ - притежава непрекъснати частни производни
Ако m расте неограничено $Q_m(x) \underset{m\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$

Нека $m = 1, 2, 3, \dots n, \dots$

x_m отсвам редица от точки, принадлежащи на сферата с радиус 1. Но сферата е компактно множество. Следователно от тая редица можем да изберем сходяща подредица $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots x_{m_k}, \dots \to x_0$ x_0 – точка от сферата

Ще докажем, че $f(x_0) = x_0$

$$|f(x_0) - x_0| \le |f(x_0) - f(x_{m_k})| + |f(x_{m_k}) - Q_{m_k}(x_{m_k})| + |Q_{m_k}(x_{m_k}) - x_0|$$

Но $Q_{m_k}(x_{m_k}) = x_{m_k}$ и $x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$

Следователно $|Q_{m_k}(x_{m_k}) - x_0| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (1)

$x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\to} x_0$ и f е непрекъсната $\Rightarrow f(x_{m_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$

Следователно $|f(x_0) - f(x_{m_k})| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (2)

Избираме произволно $\eta > 0$. Понеже $Q_{m_k}(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ за достатъчно големи стойности на k $|f(x) - Q_{m_k}(x)| < \eta$ за всяко x от единичната сфера. Специално при $x = x_{m_k}$ $|f(x_{m_k}) - Q_{m_k}(x_{m_k})| < \eta$ (3)

От (1), (2) и (3) заключаваме, че $|f(x_0) - x_0| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Но тая разлика от k не зависи. Следователно $f(x_0) = x_0$. Следователно неподвижна точка съществува. С това теоремата на Брауер е доказана напълно.

Интеграл от диференциална форма

Материята, която ще изложим в тая лекция не е част от теорията, която изучаваме и може да се изпусне. В математиката и физиката се използват много видове интеграли. Например: $\int P(x,y)\,dS$, $\int P(x,y)\,dx$, $\int P(x,y)\,dy$, $\int P(x,y,z)\,d\sigma$. За тия интеграли обаче се дават различни дефиниции, т.е. всеки вид от тях се дефинира отделно. Ние за тия интеграли ще дадем една дефиниция, като изходим от понятието „симетричен интеграл". Тук ще дадем едно определение на понятието „интеграл от диференциална форма". Освен интеграли от диференциални форми, които са позитивни функционали в математиката се използват и други интеграли.

Нека в отворено множество $V \subset R^{n+k}$ са дадени n равенства:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0 \end{cases}$$

$F_1, F_2, \dots F_n$ са функции, дефинирани в V, които притежават непрекъснати частни производни поне от 1 ред в V. Нека така полученото многообразие е затворено и без особени точки. Нека M е произволно компактно подмножество на V. Нека θ е функция, дефинирана и непрекъсната в M. Изложените по-горе условия дават възможност да образуваме симетричния интеграл $T_M(\theta)$ (тук θ е каноничното продължение на дефинираната в M функция θ, която е дефинирана в цялото пространство R^{n+k}). Нека в същото множество V са дадени още няколко функции на $n+k$ променливи, които не са по-малко от k на брой.

$$(2)\quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{k+m} = f_{k+m}(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) \end{cases}$$

Нека $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ съществуват в V и са непрекъснати.

Да такъв начин е дефинирана една трансформация $R^{n+k} \to R^{k+m}$

Ако вземем една точка $x \in M$, с помощта на трансформацията (2) можем да получим нейния образ $y \in R^{k+m}$. Ако x опише M, y ще опише някое множество $N \subset R^{k+m}$, т.е. с N означаваме образа на M при (2). Понеже (2) е непрекъсната трансформация и M е компактно множество, то образът му N е също компактно множество. Нека в N е дефинирана непрекъсната функция $Q(y_1, y_2 \dots y_{k+m})$. Ще кажем какво значи

$$\int_M \underbrace{Q(y_1, y_2, \dots y_{k+m})\, dy_{\alpha_1} \wedge dy_{\alpha_2} \wedge dy_{\alpha_3} \dots \wedge dy_{\alpha_k}}_{\text{Елементарна диференциална форма}}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$ са k на брой индекси измежду числата $1, 2, \dots k+m$. Освен това избора на тия k индекса подчиняваме на допълнителното условие всеки един от тяхди бъде по-малък от $k+n$ (защо това ще стане ясно по-късно). Независимите променливи в горната диференциална форма са $x_1, x_2, \dots x_{n+k}$, а $y_1, y_2 \dots y_{k+m}$ са функции на тия независими променливи.

Да образуваме $Q(f_1, f_2, \dots f_{k+m})$ (ако $(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) \in M$, $(f_1, f_2, \dots f_{k+m}) \in N \Rightarrow Q(f_1, f_2 \dots f_{k+m})$ можем да образуваме.) Тъка получената функция $Q(f_1, f_2, \dots f_{k+m})$ е непрекъсната функция на променливите $x_1, x_2, \dots x_{n+k}$.

Нека с $B_1, B_2, \dots B_n$ означим допълнителната на $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n+k})$ система от индекси до системата $(1, 2, \dots n+k)$. Нека да образуваме:

$$\underbrace{Q(f_1, f_2, \dots f_{k+m})}_{\text{непрекъсната функция}}\, \underbrace{\mathcal{E}}_{\text{функция - допълнителен множител, кажем}}\, \underbrace{\frac{D(f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2} \dots f_{\alpha_k}\, F_1\, F_2 \dots F_n)}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_k}\, x_{B_1}\, x_{B_2} \dots x_{B_n})}}_{\text{непрекъсната функция, може да има точки прекъсване}}$$

където допълнителния множител $\mathcal{E}$ дефинираме така:

$$\mathcal{E} = \operatorname{sgn} \frac{D(F_1, F_2, \dots F_n)}{D(x_{B_1}, x_{B_2} \dots x_{B_n})} \qquad \left(\operatorname{sgn} \xi \begin{cases} 1 & \xi > 0 \\ -1 & \xi < 0 \\ 0 & \xi = 0 \end{cases} \right)$$

Ако се случи такъв дефинираната функция да бъде интегруема, можем да образуваме

$$T_M\left(Q(f_1, f_2, \dots f_{k+m})\, \mathcal{E}\, \frac{D(f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2} \dots f_{\alpha_k}\, F_1, F_2 \dots F_n)}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots x_{\alpha_k}\, x_{B_1}\, x_{B_2} \dots x_{B_n})} \right)$$

По дефиниция

$$\int_M Q(y_1, y_2 \dots y_m)\, dy_{\alpha_1} \wedge dy_{\alpha_2} \wedge dy_{\alpha_3} \wedge \dots \wedge dy_{\alpha_k} =$$

$$= T_M\left(Q(f_1, f_2, \dots f_{k+m})\, \mathcal{E}\, \frac{D(f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2} \dots f_{\alpha_k}\, F_1 \dots F_n)}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_k}\, x_{B_1}, x_{B_2} \dots x_{B_n})} \right)$$

Ако разместим два индекса в детерминантата ще се разместят два реда или два стълба и ще се смени знака на интеграла. По такъв начин дадохме дефиниция на интеграл от елементарна диференциална форма. Да означим тая форма с ω_1. Ако са дадени диференциалните форми ω_i $(i = 1, 2, \dots s)$, изразът $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_s$ нарича се диференциална форма въобще.

$$\int \omega \overset{\text{по def}}{=} \int \omega_1 + \int \omega_2 + \dots + \int \omega_s$$ – дефиниция на интеграл от диференциална форма въобще

Каква връзка има между интеграла от диференциална форма и $k+Q$-мерния интеграл, който дефинирахме преди няколко лекции?

$$\int_M Q(y_1, y_2, \dots y_{k+m})\, dy_{\alpha_1} \wedge y_{\alpha_2} \wedge \dots \wedge dy_{\alpha_k} = T_M\left(Q\varepsilon \underbrace{\frac{D(f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_k} F_1, F_2 \dots F_n)}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_k}, x_{\beta_1} \dots x_{\beta_n})}}_{\Delta}\right)$$

Да разгледаме специалния случай, когато

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \dots \\ y_{k+m} = x_{k+m} \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 \dots & 1 & 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_{\alpha_1}} & \frac{\partial F_1}{\partial x_{\alpha_2}} & \dots \frac{\partial F_1}{\partial x_{\alpha_k}} & \frac{\partial F_1}{\partial x_{\beta_1}} \dots \frac{\partial F_1}{\partial x_{\beta_n}} \\ \dots & & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_{\alpha_1}} & \frac{\partial F_n}{\partial x_{\alpha_2}} & \dots \frac{\partial F_n}{\partial x_{\alpha_k}} & \frac{\partial F_n}{\partial x_{\beta_1}} \dots \frac{\partial F_n}{\partial x_{\beta_n}} \end{vmatrix} = \frac{D(F_1, F_2 \dots F_n)}{D(x_{\beta_1} \dots x_{\beta_n})}$$

$$\int_M \omega = T_M\left(Q\varepsilon \frac{D(F_1, F_2 \dots F_n)}{D(x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \dots x_{\beta_n})}\right) = T_M\left(Q \left| \frac{D(F_1, F_2 \dots F_n)}{D(x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \dots x_{\beta_n})} \right|\right) =$$

$$= \int_M Q\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_k}$$ Следователно $\underline{k}$-мерния интеграл, който дефинирахме преди няколко лекции не е нищо друго, освен специален интеграл от една диференциална форма (такъв интеграл, при който $y_\alpha = x_\alpha$)

Заслужава да отбележим, че дадената по-горе дефиниция не е обичайната дефиниция на понятието „интеграл от диференциална форма". Тук ние въведохме това понятие, като съществено използвахме понятието „симетричен интеграл". Обикновено това понятие се използва и затова се налага диференциалните форми да се въвеждат по друг начин.

Сега ще дадем една друга дефиниция, която е по-удобна с оглед на някои приложения и която не съвпада с обичайната дефиниция за интеграл от диференциална форма

Нека във $V \subset R^{n+k}$ е дадено затвореното многообразие без особени точки

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0 \end{cases}$$

и нека нанесем във V са дефинирани функциите:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) \\ &\dots \\ y_{n+k} &= f_{n+k}(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) \end{aligned}\right\} (2)$$

От (2) да изберем $\underline{k}$ на брой функции $y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \dots y_{\alpha_k}$

Тогда $T_M(Q(y_1, y_2, \dots y_{m+k})\, dy_{\alpha_1}\, dy_{\alpha_2} \dots dy_{\alpha_k})$ разбираме по дефиниция

$$T_M(Q(y_1, y_2, \dots y_{m+k})\, dy_{\alpha_1}\, dy_{\alpha_2} \dots dy_{\alpha_k}) = T_M\left(Q(y_1, y_2 \dots y_{m+k}) \frac{D(f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2} \dots f_{\alpha_k} F_1 \dots F_n)}{D(x_1, x_2 \dots x_{n+k})}\right)$$

За интеграл от диференциална форма се дава друга дефиниция, защото пътя по който се търсва е друг. Не е знае откъде да тръгнем. Това е така, защото не е използвал симетричен интеграл.

Нека е дадена дъга Γ: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ a \le t \le b \end{cases}$ Ще кажем как се дефинира интеграл върху дъга

$$\int_\Gamma P(x,y)\, ds \ ?$$

$$\left.\begin{aligned} x - f(t) = 0 \\ y - g(t) = 0 \end{aligned}\right\}$$ тия две равенства задават едно многообразие. Да си лисим, че са налице условията, при които дефинирахме понятието симетричен интеграл. Нека $\theta(x,y,t)$ - нер.

Следователно можем да образуваме $T_M(\theta(x,y,t))$

Ако θ не зависи от t, по дефиниция

$$\int_M P(x,y)\, ds = T_M\left(P(x,y) \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\right)$$ - по такъв начин дефинираме интеграл върху дъга

Този интеграл е линеен и позитивен функционал, за разлика от $\int P(x,y)\,dx$ и $\int Q(x,y)\,dy$ (тия функционали не са позитивни)

Как се дефинира интеграл върху повърхнина?

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x - f(u,v) = 0 \\ y - g(u,v) = 0 \\ z - h(u,v) = 0 \end{cases}$$

Ако са изпълнени условията за дефиниране понятието симетричен интеграл

дефинираме интеграл ~~в~~ повърхнина по следния начин:

$$\int_M P(x,y,z)\, d\sigma = T_M\left(\left(P(x,y,z) \sqrt{\frac{D(f,g)}{D(u,v)}}^{2} + \dots \right) \right)$$

Този интеграл е линеен и позитивен функционал, защото симетричния интеграл е линеен и позитивен функционал и $\sqrt{\frac{D(f,g)}{D(u,v)}} + \dots$ е множител по-голям от 0.

Заслужава да отбележим, че по обичайния път за тия интеграли се въвеждат различни дефиниции, а ние всичко лесно преодоляхме с въвеждането на симетричните интеграли.

Забележка. $\int_M P(x_1, x_2, \dots x_{n+k})\, dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_k} = T_M\left(P \left| \frac{D(F_1, F_2 \dots F_n)}{D(x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \dots x_{\beta_n})} \right| \right)$

– това е един позитивен функционал (Ако $P \geq 0$, то $T_M \geq 0$)

Нека е дадена дъга Γ: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $\int P(x,y)\, dx = ?$

$$\left.\begin{cases} x - f(t) = 0 \\ y - g(t) = 0 \end{cases}\right\} \text{ многообразие } (1)$$

Въвеждаме нови функции

$$\left.\begin{cases} u = x = f_1 \\ v = y = f_2 \\ w = z = f_3 \end{cases}\right\} \text{ системата от функции } (2)$$

$$\underbrace{T_M\left(Q \frac{D(f_1, F_1, F_2)}{D(x,y,t)} \right)}_{\Delta} = T_M\left(Q \cdot f'(t) \right) = \int_a^b Q f'(t)\, dt$$ – интеграл от дъга на функцията Q

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -f' \\ 0 & 1 & -g' \end{vmatrix} = f'$$

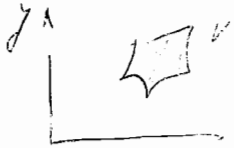
Ако в T_M $Q f'(t)$ направим смяната $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ a \leq t \leq b \end{cases}$ получаваме $\int_a^b Q f'(t)\, dt$ (интеграл в дъга на е друг тип, защо)

По такъв начин изразихме криволинейния интеграл чрез симетричен.

Формули на Грин, Остроградски – Гаус и Стокс

Нека са дадени функциите $G_1, G_2, \dots G_s$ в отворено множество V на равнината xy, които имат непрекъснати частни производни от 1 ред в това множество.

$$(1) \begin{cases} G_1(x,y) \geq 0 \\ G_2(x,y) \geq 0 \\ \dots \\ G_s(x,y) \geq 0 \end{cases}$$



Ако приравним някое от неравенствата на нула, т.е. $G_i(x,y) = 0$, получаваме многообразие с едно равенство.

Искаме за така полученото многообразие да бъдат изпълнени условията, при които дефинирахме понятието симетричен интеграл. Искаме това многообразие да е затворено множество и да няма особени точки. Нека съвкупността от точки M в равнината, които удовлетворяват тия неравенства (1) е компактно множество. Можем да образуваме $\iint_M Q(x,y)\, dx\, dy$ върху всяка непрекъсната функция. Понеже (1) е многообразие без равенства, обикновения интеграл е и едновременно симетричен интеграл. Да вземем обикновен интеграл върху непрекъсната функция

$$\iint_M \begin{vmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{vmatrix} dx\, dy = T_M\left(\frac{D(P,Q)}{D(x,y)} \right)$$

По интегралите в дясната част на равенството е симетричен интеграл от една специална функционална детерминанта. За тоя интеграл можем да приложим редуцираната формула (стига сечението на стените да е множество с мярка 0)

Но тая формула $T_M\left(\frac{D(P,Q)}{D(x,y)}\right) = -\sum_{\alpha=1}^{s} T_{\Gamma_\alpha}\left(P\frac{D(G_\alpha,Q)}{D(x,y)}\right)$

Да разгледаме специалния случай $Q = y$

Тогава написаното по-горе равенство добива следния вид:

$$\iint_M P'_x\,dx\,dy = -\sum_{\alpha=1}^{s} T_{\Gamma_\alpha}\left(P\begin{vmatrix}\frac{\partial G_\alpha}{\partial x} & \frac{\partial G_\alpha}{\partial y}\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right) = -\sum_{\alpha=1}^{s} T_{\Gamma_\alpha}\left(P\frac{\partial G_\alpha}{\partial x}\right)$$

Но $\frac{\partial G_\alpha}{\partial x} = \frac{D(G_\alpha)}{D(x)}$ Ние се условихме да означаваме последната сума като $-\sum_{\alpha=1}^{s} T_{\Gamma_\alpha}(P\,dy)$ Но такъв начин формулата добива вида:

$$\boxed{\iint_M P'_x\,dx\,dy = -\sum_{\alpha=1}^{s} T_{\Gamma_\alpha}(P\,dy)}$$ формула на Грин.

Понякога тая формула се нарича формула на Грин - Гаус.

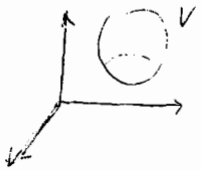
Тя изразява двоен интеграл от частна производна чрез интеграли върху стените.

Записана чрез симетрични интеграли формулата изглежда така:

$$\boxed{\iint_M P'_x\,dx\,dy = -\sum_{\alpha=1}^{s} T_{\Gamma_\alpha}\left(P\frac{\partial G_\alpha}{\partial x}\right)}$$

Формула на Остроградски - Гаус

(1) $\left|\begin{array}{l} G_1(x,y,z)\geqslant 0\\ G_2(x,y,z)\geqslant 0\\ \dots\dots\\ G_s(x,y,z)\geqslant 0\end{array}\right\}$ G_α дефинират в отворено множество V в пространството. Нека съвкупността от точки удовл. (1) е M - компактно множество



$$\iiint_M P'_x\,dx\,dy\,dz = \iiint_M \begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z\\ Q'_x & Q'_y & Q'_z\\ R'_x & R'_y & R'_z\end{vmatrix}\,dx\,dy\,dz$$

одинаков брой интеграли от частни производни

Да разгледаме специалния случай $Q = y$ $R = z$

Тогава това е интеграл, разпространен върху многообразие без равенства, и имаме

$$\iiint_M \begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z\\ Q'_x & Q'_y & Q'_z\\ R'_x & R'_y & R'_z\end{vmatrix}\,dx\,dy\,dz = T_M\left(\begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z\\ Q'_x & Q'_y & Q'_z\\ R'_x & R'_y & R'_z\end{vmatrix}\right)$$

При известни предположения за тоя симетричен интеграл от такъв специален функционален детерминант можем да приложим редукционната формула и да получим:

$$T_M\left(\begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z\\ Q'_x & Q'_y & Q'_z\\ R'_x & R'_y & R'_z\end{vmatrix}\right) = -\sum_{\alpha=1}^{s} T_{\Gamma_\alpha}\left(P\begin{vmatrix} \frac{\partial G_\alpha}{\partial x} & \frac{\partial G_\alpha}{\partial y} & \frac{\partial G_\alpha}{\partial z}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\right) = -\sum_{\alpha=1}^{s} T_{\Gamma_\alpha}\left(P\frac{\partial G_\alpha}{\partial x}\right)$$

Окончателно получаваме формулата на Остроградски - Гаус

$$\boxed{\iiint_M P'_x\,dx\,dy\,dz = -\sum_{\alpha=1}^{s} T_{\Gamma_\alpha}\left(P\frac{\partial G_\alpha}{\partial x}\right)}$$, записана в симетрични интеграли

Общата формула, записана в диференциали има вида:

$$\boxed{\iiint_M P'_x\,dx\,dy\,dz = -\sum_{\alpha=1}^{s} T_{\Gamma_\alpha}(P\,dy\,dz)}$$

Формула на Стокс

Нека V е отворено множество в R^3 Нека $F(x,y,z)$ е функция, дефинирана във V, която притежава непрекъснати частни производни поне от първи ред спрямо всичките си променливи. Да разгледаме многообразието дефинирано с равенството $F(x,y,z) = 0$. Нека за това многообразие са налице условията, при които дефинирахме понятието симетричен интеграл (графиката на това многообразие е затворено множество и то е многообразие без особени точки)

Нека са дадени няколко неравенства:

$$\begin{cases} G_1(x,y,z) \geq 0 \\ G_2(x,y,z) \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ G_s(x,y,z) \geq 0 \end{cases}$$

Нека съвкупността от точки в пространството, които удовлетворяват тия неравенства бъде компактно множество.

Нека са налице условията, при които можем да дефинираме понятието симетричен интеграл върху стените на многообразието, определено от разглежданите равенство и дадените неравенства. Нека мярката на сечението на тия стени (двуизмерната мярка) е равна на 0. Ако $G_\alpha = 0$, получаваме стената Γ_α.

Нека образуваме $T_\Gamma\left(\frac{D(P,Q,F)}{D(x,y,z)}\right)$ (P, Q, F – функции, притежаващи непрекъснати частни производни поне от 1ред спрямо всичките си променливи)

Всички условия за прилагане на редукционната формула за тоя симетричен интеграл са налице.

Съгласно тая формула

$$T_\Gamma\left(\frac{D(P,Q,F)}{D(x,y,z)}\right) = -\sum_{\alpha=1}^{s} T_{\Gamma_\alpha}\left(P\frac{D(G_\alpha,Q,F)}{D(x,y,z)}\right)$$

Нека функцията $Q(x,y,z)$ е избрана по следния начин т.е $Q = z$.

$$\left(\begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ F'_x & F'_y & F'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ 0 & 0 & 1 \\ F'_x & F'_y & F'_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} P'_x & P'_y \\ F'_x & F'_y \end{vmatrix}\right.$$

Тогава написаната по-горе формула добива вида:

$$T_\Gamma\left(-\begin{vmatrix} P'_x & P'_y \\ F'_x & F'_y \end{vmatrix}\right) = -T_\Gamma\left(\begin{vmatrix} P'_x & P'_y \\ F'_x & F'_y \end{vmatrix}\right) = (-1)\left[-\sum_{\alpha=1}^{s} T_{\Gamma_\alpha}\left(P\begin{vmatrix} G'_{\alpha x} & G'_{\alpha y} \\ F'_x & F'_y \end{vmatrix}\right)\right.$$ или

окончателно $\boxed{T_\Gamma\left(\begin{vmatrix} P'_x & P'_y \\ F'_x & F'_y \end{vmatrix}\right) = -\sum_{\alpha=1}^{s} T_{\Gamma_\alpha}\left(P\begin{vmatrix} G'_{\alpha x} & G'_{\alpha y} \\ F'_x & F'_y \end{vmatrix}\right)}$

Получената формула се нарича формула на Стоке. Тая формула може да се напише и с помощта на интеграли от диференциални форми, но това не няма да правим. Тя се употребява в хидродинамиката, електричеството и пр.

Диференциални форма – определение.

Интеграл от диференциални форми – продължение.

Дадените дефиниции в предната лекция под това заглавие тук ще формулираме в една по-съвършена форма.

Нека в отвореното множество $V \subset R^{n+k}$ са дадени n функции $F_1, F_2, \dots F_n$, които притежават непрекъснати частни производни поне от първи ред спрямо всичките си променливи в това множество. Интересуваме се от многообразието, определено от следните уравнения:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0 \end{cases}$$

Нека това е затворено многообразие без особени точки.

Нека са дадени s функции, дефинирани във V и притежаващи непрекъснати частни производни поне от първи ред спрямо всичките си променливи в това множество.

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_s = f_s(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) \end{cases}$$

Нека освен това $s \leq k$. Ще кажем какво значи диференциална форма от ред $s \leq k$. Когато реда $s \geq k$, диференциалната форма ще дефинираме като 0.

Нека $\frac{D(F_1, F_2, \dots F_n)}{D(x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \dots x_{\beta_n})} \neq 0$ в някоя точка от многообразието

(понеже тая точка е особена за нашето многообразие по предположение, тъй като детерминантата вътре съществува)
Понеже тая детерминанта е непрекъсната функция на $n+k$ променливи в V, тя е отлична от 0 в някоя околност на разглежданата точка. Нека с B означим системата $B = (B_1, B_2, \dots B_n)$. Нека $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k)$ е допълнителната на B система до системата от индекси $(x_1, x_2, \dots x_{n+k})$
Нека съответните на системата α променливи означим с $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots x_{\alpha_k}$. Нека от тях $\underline{k}$ променливи изберем $\underline{s}$. Без ограничение на общността можем да считаме, че сме избрали $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots x_{\alpha_s}$ (ако не сме избрали точно тях можем да извършим преномериране)

Дефиниция: Изразът

$$\boxed{\omega = P \frac{\dfrac{D(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s, F_1, F_2, \dots F_n)}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_s}, x_{B_1}, x_{B_2} \dots x_{B_n})}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \dots F_n)}{D(x_{B_1}, x_{B_2} \dots x_{B_n})}} \underbrace{dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_s}}_{\text{(мястото, където сме заместили променливи сме избрали от останалите } \underline{k} \text{ променливи)}}}$$

е частна елементарна диференциална форма, определена от тоя избор на променливите $(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots x_{\alpha_s})$
Тук $P = P(x_1, x_2, \dots x_{n+k})$ – функция на $n+k$ променливи.
Дефиницията зависи от начина по който сме избрали променливите $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_s}$, понеже тия променливи можем да изберем по различни начини от останалите $\underline{k}$ променливи (ако $s = k$ тоя израз е определен еднозначно)
Ако имаме няколко диференциални форми от еднакъв общ ред, $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_m$, формалната сума $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m$ наричаме обща диференциална форма ω от ред s
За диференциалните форми се дефинират следните операции: събиране, умножение и диференциране на диференциални форми.

1) Събиране дефинираме за диференциални форми от един и общи ред.
Нека ω' и ω'' са общи диференциални форми от ред s
Как ще дефинираме сумата $\omega' + \omega''$?
Пишем елементарните диференциални форми, съставящи ω' и след това елементарните диференциални форми, съставящи ω''. Така се дефинира сума на две общи диференциални форми.
2) Произведение можем да дефинираме и за общи диференциални форми от различен ред.
Най-напред ще дефинираме произведение на две елементарни диференциални форми и след това ще дадем дефиниция за произведение на две общи диференциални форми.
Нека са дадени елементарните диференциални форми ω'_ν и ω''_μ.

$$\omega'_\nu = P \frac{\dfrac{D(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s, F_1, F_2 \dots F_n)}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_s}, x_{B_1}, x_{B_2} \dots x_{B_n})}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \dots F_n)}{D(x_{B_1}, x_{B_2} \dots x_{B_n})}} dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_s}$$

$$\omega''_\mu = Q \frac{\dfrac{D(\beta_1, \beta_2 \dots \beta_\ell, F_1, F_2 \dots F_n)}{D(x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \dots x_{\beta_\ell}, x_{B_1}, x_{B_2} \dots x_{B_n})}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \dots F_n)}{D(x_{B_1}, x_{B_2} \dots x_{B_n})}} dx_{\beta_1}\, dx_{\beta_2} \dots dx_{\beta_\ell}$$

$$\boxed{\omega'_\nu\, \omega''_\mu \overset{\text{по def}}{=} PQ \frac{\dfrac{D(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_s, \beta_1, \beta_2 \dots \beta_\ell, F_1, F_2 \dots F_n)}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_s}, x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \dots x_{\beta_\ell}, x_{B_1}, x_{B_2} \dots x_{B_n})}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \dots F_n)}{D(x_{B_1}, x_{B_2}, \dots x_{B_n})}} dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_s}\, dx_{\beta_1} \dots dx_{\beta_s}}$$

Така стои работата, ако сумата на двата реда $s+l$ на двете елементарни диференциални форми е по-малка или равна на k. Ако $s+l>k$, $\boxed{\omega'_\nu \omega''_\mu \overset{\text{по def}}{=} 0}$

Произведение на две общи диференциални форми $\sum \omega'_\nu$ и $\sum \omega''_\nu$ дефинираме по такъв начин, че да бъде валидно правилото $\sum \omega'_\nu \sum \omega''_\nu = \sum \omega'_\nu \omega''_\nu$

3) Диференциране:

Нека ω е една диференциална форма на $n+k$ променливи от s-ти ред. Под диференциал на тая форма разбираме елементарната диференциална форма

$$d\omega = \frac{\dfrac{D(P, f_1, f_2, \dots f_s, F_1, F_2 \dots F_n)}{D(x_{\alpha_0}, x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_s}, x_{\beta_1} \dots x_{\beta_n})}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \dots F_n)}{D(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots x_{\beta_n})}} dx_{\alpha_0}\, dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_s}$$

Така се дефинира диференциал от елементарна диференциална форма.

Ако $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$ е обща диференциална форма, под диференциал от тая форма разбираме по дефиниция

$$d\omega = d\omega_1 + d\omega_2 + \dots + d\omega_n$$

За така въведените операции са в сила следните зависимости:

$d\omega = d\omega_1 + d\omega_2 + \dots + d\omega_n$ – диференциал от обща диф. форма

1. Сумата е комутативна и асоциативна
2. Произведението не е комутативно, но е асоциативно. В сила е: $\omega'\omega'' = -\omega''\omega'$
3. Валидно е правилото за диференциране на произведение $d\omega'\omega'' = \omega'(d\omega'') + (d\omega')\omega''$
4. $d^2\omega = d(d\omega) = 0$

За да се различават тия операции от операциите между числови функции, умножението обикновено се пише $\wedge$, т.е. $\omega' \wedge \omega''$ – умножение м/у диф. форми, но тоба се разбира и по слепване.

Тия дефиниции можем да дадем така, че те да бъдат по-естествени. В съвкупността на диференциалните форми се стремим да въведем дефинициите така, че да бъдат в сила споменатите по-горе свойства.

Дефинициите ще дадем индуктивно.

Под диференциална форма от I ред ще разбираме сума на елементарни диференциални форми от I ред, т.е. сума от вида:

$$\omega = P_1\, dx_1 + P_2\, dx_2 + \dots + P_n\, dx_n + \dots + P_{n+k}\, dx_{n+k}$$

Знаем, че

$$\boxed{dP = \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial P}{\partial x_{n+k}} dx_{n+k}}$$ – тотален диференциал на функцията P.

$$d(dx_\nu) = 0$$

Правилото за диференциране на произведение ни дава следното:

$$d\omega = (dP_1)\, dx_1 + (dP_2)\, dx_2 + \dots + (dP_{n+k})\, dx_{n+k}$$ – дефиниция на понятието диференциал от диференциална форма от I ред. Можем да дадем дефиниция за диференциална форма от s-ти ред. Аналогично се дефинира понятието диференциал за диференциална форма от II ред и т.н.

Проверява се, че при така зададените дефиниции са налице свойствата, за които споменахме по-горе.

Сега ще кажем как се дефинира понятието интеграл от диференциална форма ω. Нека M е произволно компактно подмножество на V

$$\int_M \omega \overset{\text{по def}}{=} T_M\left(P \frac{D(f_1, f_2, \dots f_s, F_1, F_2 \dots F_n)}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_s}, x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \dots x_{\beta_n})}\right)$$

Дефиницията, която обикновено се дава за понятието интеграл от диференциална форма е друга.

Означаваме с $\varepsilon = \operatorname{sgn} \dfrac{D(F_1, F_2, \dots F_n)}{D(x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \dots x_{\beta_n})}$

$$\int \omega \overset{\text{по дет}}{=} T_M\left(\varepsilon P \frac{D(f_1, f_2, \dots f_s, F_1, F_2 \dots F_n)}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots x_{\alpha_s}, x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \dots x_{\beta_n})}\right)$$

Какъв е знакът на ε, зависи от това, каква точка вземаме. Тая дефиниция не е коректна, защото ε не е определено еднозначно. Има обаче известни категории многообразия, където ε не зависи от начина по който сме избрали $x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \dots x_{\beta_n}$. Такива многообразия се наричат ориентируеми. Но всички обикновено се разглеждат ориентируеми многообразия.

Обикновено интегралът от диференциални форми се дефинира по друг начин. Най-напред интеграла се дефинира локално, а след това дефиницията се разширява с помощта на леката за разлагане на единицата. Тогава множителят ε идва сам, поради факта, че правилото за смяна на променливите при диференциалните форми се отнася само за положителни детерминанти. Ние ще използваме по-простото покажите – първата дефиниция за интеграл от диференциална форма, която дадохме.

От всичко направено дотук можем да заключим, че:

1. С помощта на симетричните интеграли можем да направим всичко, което можем да направим с интеграли от диференциални форми.
2. Ние освен това с тях можем да правим и нещо друго нещо, защото симетричните интеграли се използват и за неориентируеми многообразия.
3. Ние въведохме понятието диференциална форма и интеграл от диференциална форма по такъв необичаен начин и бяхме освободени от необходимостта да даваме сложни и дълги дефиниции. Всички свойства на интегралите от диференциални форми могат да бъдат преведени на езика на симетричните интеграли и тяхно да бъдат използвани. Формулите, които дадохме за интеграл от диференциални форми имат още едно важно свойство: Диференциалните форми в тия формули са представени във вид на детерминанти, т.е. те се изчисляват. В общата теория на диференциалните форми, която се излага обикновено се доказва съществуването на диференциални форми, но те не се изчисляват. В теорията на диференциалните форми е удобна алгебричната страна (събиране, умножение, диференциране). Поради инвариантността относно смяна на променливите се срещат редица затруднения. За да се избегнат тия затруднения се разглеждат т.нар. нечетни диференциални форми. При тях правилото за смяна на променливите е валидно, но правилата за смятане не са валидни. При симетричния интеграл обаче всички тия удобства са налице. С това завършваме засега изучаването на симетричните интеграли.

Ортогонални системи

Нека в интервала $[a, b]$ са дадени две функции $f(x)$ и $g(x)$. Ще казваме, че тия две функции са ортогонални в интервала $[a, b]$, ако $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$ (за да можем да образуваме тоя интеграл трябва произведението $f(x)\, g(x)$ да бъде интегруема функция.) Тоя интеграл понякога се нарича скалярно произведение на функциите $f(x)$ и $g(x)$. За да не усложняваме нещата по-нататък ще разглеждаме само непрекъснати функции.

Нека са дадени n линейно-независими функции $f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x)$. Това значи, че линейната комбинация с постоянни коефициенти $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0$ за всяко x тогава и само тогава, когато $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Такива системи линейно-независими функции има. Да разгледаме функциите $1, x, x^2, \dots x^n$. Тия функции образуват линейно-независима система във всеки интервал.

Доказателство.

Да допуснем, че му тия функции има линейна зависимост. Образуваме линейната комбинация $\lambda_1 + \lambda_2 x + \dots + \lambda_n x^n = 0$ – полином на x, която линейна комбинация не е тривиалната по предположение. Тяка образувания полином е нулира за безброй стойности на x $\Rightarrow$ всички негови коефициенти са 0. – достигаме до противоречие, дължащо се на допускането, че разглежданите функции са линейно-зависими. Следователно те са линейно независими.

Ако имаме n линейно-независими функции, с помощта на тия функции можем да образуваме други n функции, които ще бъдат две по две ортогонални помежду си, т. е. можем да ортогонализираме дадената система от n функции.

Образуваме $\varphi_1(x) = f_1(x)$

$$\varphi_2(x) = \mu f_1 + f_2 = \mu \varphi_1 + f_2$$

Коефициентът μ тук избираме така, че функцията φ_2 да е ортогонална на φ_1.

$$0 = \int_a^b \varphi_1 \varphi_2 \, dx = \int_a^b f_1(\mu f_1 + f_2)\, dx = \mu \int_a^b f_1^2 dx + \int_a^b f_1 f_2 dx = 0$$

Получаваме едно уравнение относно неизвестното μ. Ако $\int_a^b f_1^2 dx \neq 0$, μ се определя еднозначно от това уравнение.

Ако f_1 – непрекъсната, f_1^2 също е непрекъсната. Щом $\int_a^b f_1^2(x) = 0$ за всяко $x \in [a, b]$ $\Rightarrow$ $f_1 \equiv 0$ в $[a, b]$. Следователно дадените n функции ще изглеждат линейно зависими, защото му тях съществува линейна комбинация $1 f_1 + 0 f_2 + \dots + 0 f_n = 0$ (по предположение линейна зависимост му тия функции ние нямаме. Следователно f_1 не се нулира тъждествено в $[a, b]$. Следователно μ можем да определим.) За нас е интересно, че $\varphi_2(x) \not\equiv 0$. Ако $\varphi_2(x) \equiv 0$, ще имаме линейна зависимост между f_1 и f_2, а оттам и му $f_1, f_2, \dots f_n$, а по предположение нямаме такава.

Образуваме $\varphi_3(x) = \nu_1 \varphi_1 + \nu_2 \varphi_2 + f_3$. Коефициентите ν_1 и ν_2 избираме така, че функцията φ_3 да бъде ортогонална на φ_1 и на φ_2.

$$0 = \int_a^b \varphi_3 \varphi_i \, dx = \int_a^b (\nu_1 \varphi_1 + \nu_2 \varphi_2 + f_3) \varphi_i \, dx = \nu_1 \int_a^b \varphi_1 \varphi_i \, dx + \nu_2 \int_a^b \varphi_2 \varphi_i \, dx + \int_a^b f_3 \varphi_i \, dx = 0 \qquad i = 1, 2$$

Ако $i = 1$, горното уравнение добива вида:

$$\nu_1 \underbrace{\int_a^b \varphi_1^2 dx}_{\neq 0 \text{ (защото } \varphi_1 \not\equiv 0)} + \int_a^b f_3 \varphi_1 dx = 0$$

Оттук определяме ν_1.

Ако $i = 2$, получаваме следното уравнение:

$$\nu_2 \underbrace{\int_a^b \varphi_2^2 dx}_{\neq 0 \text{ (защото } \varphi_2 \not\equiv 0)} + \int_a^b f_3 \varphi_2 \, dx = 0$$

Оттук определяме ν_2. Следователно намерихме ν_1 и ν_2 с исканите свойства.

Ако допуснем, че $\varphi_3 = \nu_1 \varphi_1 + \nu_2 \varphi_2 + f_3 \equiv 0$ в $[a, b]$, ще

получим линейна комбинация на f_1, f_2 и f_3, където коефициентът пред f_3 е 1. – получаваме, че f_1, f_2 и f_3 са линейно зависими, а оттам получаваме и линейна зависимост между функциите $f_1, f_2, \dots f_n$, каквато по предположение я няма.

Нека φ_k е дефинирана като линейна комбинация на функциите $f_k, f_{k-1}, f_{k-2} \dots f_1$ и φ_k е ортогонална на φ_i $(i=1,2,\dots k-1)$

Образуваме $\varphi_{k+1} = \tau_1\varphi_1 + \tau_2\varphi_2 + \dots + \tau_k\varphi_k + f_{k+1}$

Тия коефициенти могат да бъдат избрани така, че функцията φ_{k+1} да бъде ортогонална на всички предшествуващи φ_i $(i=1,2,\dots k)$

$$\int_a^b \varphi_{k+1}\varphi_i = \tau_1\int_a^b \varphi_1\varphi_i + \tau_2\int_a^b \varphi_2\varphi_i + \dots + \tau_k\int_a^b \varphi_k\varphi_i + \int_a^b f_{k+1}\varphi_i = 0$$

Оттук имаме $\int_a^b \varphi_{k+1}\varphi_i = \tau_i\int_a^b \varphi_i^2 + \int_a^b f_{k+1}\varphi_i = 0$

Следователно коефициенти τ_i $(i=1,2,\dots k)$ можем да определим.

(изключено, че $\int_a^b \varphi_i^2 = 0$ защото $\varphi_i \equiv 0$)

Така получихме функциите $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$, никоя от които не се анулира тъждествено и за всеки две от тия функции знаем, че са ортогонални помежду си.

Ако всяка една от функциите φ_i умножим с произволна константа C_i $(i=1,2,\dots n)$, получените функции пак са ортогонални две по две.

$$\int_a^b C_i\varphi_i\, C_k\varphi_k = C_iC_k\int_a^b \varphi_i\varphi_k = 0$$

Можем константите C_i да изберем така, че $C_i^2\int_a^b \varphi_i^2\,dx = 1$

Ако е изпълнено това равенство системата се нарича нормирана. По такъв начин виждаме, че има системи от функции, които са нормирани и ортогонални.

За такива ортогонални и нормирани системи ще докажем следното:

Неравенство на Бесел

Нека функциите $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ образуват ортогонална и нормирана система от функции, т.е

$$\int_a^b \varphi_i\varphi_k\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k \\ 1 & \text{при } i = k \end{cases}$$

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана и непрекъсната в $[a,b]$ (неравенството е вярно и само за непрекъснатите функции, но ние за улесняване на разсъжденията ще разглеждаме тоя случай.)

Числото $a_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx$ наричаме i-ти Фурие в коефициент на функцията f относно разглежданата система от функции, а формулите по които се получават тия коефициенти се наричат формули на Ойлер.

Неравенството на Бесел гласи, че:

$$\boxed{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Доказателство:

Означаваме $S(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\varphi_\nu$ $\quad a_\nu$ - коефициентите на Фурие за функцията f

Образуваме

$$\int_a^b [f(x) - S(x)]^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\int_a^b f(x)S(x)\,dx + \int_a^b S^2(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\int_a^b f(x)\varphi_\nu(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_\nu a_\mu\int_a^b \varphi_\nu(x)\varphi_\mu(x)\,dx =$$

$S^2(x) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_\nu a_\mu\varphi_\nu\varphi_\mu$. Ако $\nu \neq \mu$ $\int_a^b \varphi_\nu(x)\varphi_\mu(x) = 0$, а при $\nu = \mu$, то е 1)

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2$$

Окончателно $0 \le \int_a^b \underbrace{[f(x) - S(x)]^2}_{+} = \int_a^b f^2(x) - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2$, с което неравенството на Бесел е доказано, т.е $\boxed{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx}$

Особен интерес за нас представляват безкрайните редици от непрекъснати функции, при които всеки два члена са ортогонални помежду си.

Да разгледаме безкрайната реални ортогонални нормирана система от непрекъснати функции в интервала $[a,b]$

$\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n \dots$, т.е

$$\int_a^b \varphi_i \varphi_k = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k \\ 1 & \text{при } i = k \end{cases} \qquad a_\nu = \int_a^b f(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx$$

– коефициентите на Фурие.

Основен въпрос за нас е въпроса за разлагаемостта на функциите във вид на безкраен ред.

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) + \dots$$

Да допуснем, че функцията $f(x)$ може да се представи по тоя начин и да допуснем, че получения ред е равномерно сходящ в $[a,b]$. Тогава тия коефициенти a_i можем да пресметнем.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i \qquad f(x)\varphi_\nu(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i \varphi_\nu$$

Интегрираме и получаваме $\int_a^b f(x)\varphi_\nu(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_i \int_a^b \varphi_i \varphi_\nu = a_\nu$ – това е коефициента на Фурие.

$$\left(\int_a^b \varphi_i \varphi_\nu\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq \nu \\ 1 & \text{при } i = \nu \end{cases} \right)$$

Ние тия интеграми можем да образуваме независимо от това, дали $f(x)$ е разлагаема или не в ред и да пресмятаме тия коефициенти. За такива пресметнатите коефициенти е валидно неравенството на Бесел.

Допълнение към общата теория на понятието Лебегов интеграл

Може да се случи произведението на две интегруеми в Лебегов смисъл функции да не е интегруема в Лебегов смисъл функция. Нека например лесно се проверява, че функцията $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ е дефинирана почти навсякъде (тя е дефинирана навсякъде с изключение на точката 0) и е интегруема в Лебегов смисъл. Обаче също така лесно се виждат, че функцията $f^2(x) = \frac{1}{x}$ не е интегруема в Лебегов смисъл функция.

Т1 – Нека K е топологично пространство, такова че за всяка негова точка съществува финитна функция, която приема стойност различна от 0 в тая точка. Нека J е линеен функционал, дефиниран в съвкупността от финитните функции, който е продължен до Лебегов интеграл.

Нека пространството на интегруемите в Лебегов смисъл функции означим с L. Нека $f \in L$, $g \in L$ и $|g| \leq A$ – константа. При тия предположения ще докажем, че $fg \in L$.

Доказателство:

1 – Нека $g \geq 0$

1) Нека f е интегруема полунепрекъсната отдолу функция, а g – финитна функция.

От f – интегруема полунепрекъсната отдолу функция следва, че съществува монотонно-растяща редица от финитни функции $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots \to f$, редицата от интегралите на която е ограничена, т.е $\int f_n \leq B$.

Да разгледаме редицата от финитни функции

$f_1 g \leq f_2 g \leq \dots \leq f_n g \leq \dots \to fg$. По предположение $g \leq A$ и $\int f_n \leq B$

$\int f_n g\,dx \leq \int f_n A\,dx = A \int f_n\,dx \leq AB$. Следователно в тоя специален случай fg е интегруема полунепрекъсната отдолу функция, т.е $fg \in L$.

Доказателството е аналогично, когато f е функция, интегруема и полунепрекъсната отгоре.

2) Нека $f \geq 0$ и f е полунепрекъсната отдолу функция.
Нека g е интегруема полунепрекъсната отдолу функция.
Съществува редица $g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_n \leq \dots \to g(x)$ g_i - функции
От разглеждане редицата $fg_1 \leq fg_2 \leq \dots \leq fg_n \leq \dots \to fg$
$\int fg_n dx \leq \int fg dx \leq \int fA dx = A \int f$ По теоремата на Бепо-Леви за полунепрекъснатите функции заключваме
Следователно fg е интегруема полунепрекъсната отдолу функция, т.е $fg \in L$

3) Нека f е интегруема в Лебегов смисъл функция и $f \geq 0$
Нека g - финитна функция $g \geq$
От $f \in L$ имаме

$m \leq f \leq p$

интегруема полунепрекъсната отгоре минорантна; интегруема полунепрекъсната отгоре мажорантна

За всяко $\varepsilon > 0$ m и p можем да изберем такъв, че $\int (p - m) dx < \varepsilon$

$mg \leq fg \leq pg$

интегруеми полунепрекъснати отгоре; интегруеми полунепрекъснати отдолу (произведение на интегруеми полунепрекъснати отдолу с неотрицателни финитни)

$\int (pg - mg) = \int (p - m)g \leq \int (p - m)A = A \int (p - g) \leq A\varepsilon$
Следователно $fg \in L$ и в тоя случай

б) Нека g е интегруема полунепрекъсната отдолу функция
Съществува редица $g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_n \leq \dots \to g$
$fg_1 \leq fg_2 \leq \dots \leq fg_n \leq \dots \to fg$
$\int fg_n \leq A \int f$ От теоремата на Бепо-Леви заключваме, че $fg \in L$

в) Ако $g \in L$, съществуват интегруема полунепрекъсната отгоре минорантна s и интегруема полунепрекъсната отдолу мажорантна r, т.е $s \leq g \leq r$. Прилагайки подобни разсъждения и в тоя случай установяваме, че $fg \in L$.
На много места предполагахме, че $f \geq 0$ и $g \geq 0$ да се освободим от тия ограничения.

11) Всяка интегруема функция в Лебегов смисъл може да се представи като разлика на две неотрицателни, интегруеми в Лебегов смисъл функции.

$$f = \underbrace{|f|}_{\in L} - \underbrace{(|f| - f)}_{\in L}$$

$|f| \geq 0$, $|f| - f \geq 0$

$f = f_1 - f_2 \quad f_1 \geq 0 \quad f_2 \geq 0 \quad f_1 \in L, f_2 \in L$

$g = g_1 - g_2 \quad g_1 \geq 0 \quad g_2 \geq 0 \quad g_1 \in L \quad g_2 \in L$

Понеже по предположение функциите g е ограничена, функциите g_1 и g_2 могат да бъдат избрани така, че и те да бъдат ограничени.

$fg = f_1 g_1 - f_1 g_2 - f_2 g_1 + f_2 g_2 \in L$

(това теореме е доказана напълно.

Нека l е едно измеримо подмножество на R.
Нека φ е характеристичната функция на това множество.
Под $\int_l f$ ще разбираме $\int_l f = \int f \varphi$

За да продължим нашите изследвания върху Лебеговите интеграли се налага да направим едно ново предложение.
Ще изследваме една класа от такъвна Лебегови интеграли, за които ще можем да установим повече неща.
Отсега нататък ще предполагаме, че в нашето пространство R има поне една интегруема в Лебегов смисъл функция $p(x)$, за която всички нейни стойности са положителни, т.е $p(x) > 0$ за всяко $x \in R$.
За всяко пространство с краен брой измерения например това условие е излишно.
Например за R^1 една такава функция е $\frac{1}{1+x^2}$ или e^{-x^2}.

За R^2 – такива е например функциите $\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+y^2}$

За пространство с n измерения, ако вземем n такива функции, пак ще получим функция с желаните свойства.

Ако вземем някое подмножество на R^n и релативната топология, относно тая топология пак е изпълнено нашето първо условие, при което дефинирахме понятието Лебегов интеграл.

За пространства в които са изпълнени посочените две условия се дефинира понятието измерима функция.

Дефиниция: Една функция $f(x)$ се нарича измерима, ако съществува редица от интегруеми в Лебегов смисъл функции $f_1, f_2, \dots f_n, \dots$, която клони към нашата функция f почти навсякъде.

(В дадената дефиниция $f_1, f_2, \dots f_n \dots$ е обикновена редица от функции.

Сума, произведение, частно (ако знаем, че знаменателя е различен от 0 почти навсякъде в R) на две измерими функции е пак измерима функция.

Граница на обикновена редица от измерими функции е пак измерима функция. (тая дефиниция, която дадохме не зависи от новото предположение, което направихме, но теоремите, които ще докажем ще зависят от него.)

Т Нека f и g – измерими. Ще докажем, че fg – измерима

Доказателство

От f – измерима $\Rightarrow$ съществува обикн редица $f_n(x) \to f(x)$ почти за всяко $x \in R$

От g – измерима $\Rightarrow$ съществува обикн. редица $g_n(x) \to g(x)$ почти за всяко $x \in R$

$\therefore f_n(x) g_n(x) \to f(x) g(x)$ почти за всяко $x \in R$, т.е fg – измерима.

С тази, всичко е доказано. $f_n \to f$ $g_n^* = \min(g_n, np(x)) \to g$

$g_n^{**} = \max(-np(x), g_n^*) \to g$; $|g_n^{**}| \le np(x) \le n$ $(p(x) \le 1)$

$f_n^* f_n^{**} \in L$

$\Rightarrow$ [illegible]

Другите свойства се доказват аналогично.

Т2 – Нека $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n \dots \to \varphi$ почти навсякъде φ_i – измерими функции

Ще докажем, че φ – измерима функция.

Доказателство:

Преди да докажем теоремата ще докажем следната лема

Лема: Нека f – измерима функция и $|f| \le \psi$, където $\psi \in$

Ще докажем, че $f \in L$

Доказателство:

От f – измерима $\Rightarrow$ съществува $f_1, f_2 \dots f_n \dots \to f$ $f_i \in L$

Означаваме $g_n = \min(f_n, \psi)$ $f_n \in L$, $\psi \in L \Rightarrow g_n \in L$

$g_n = \min(f_n, \psi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \min(f, \psi) = f$, т.е $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$

Освен това $g_n \le \psi$.

Образуваме нови редица $h_n = \max(g_n, -\psi) \le \psi$

(защото $g_n \le \psi$, $-\psi \le \psi$)

Имаме $h_n \in L$ и $h_n \le \psi$ $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \max(f, -\psi) = f$

$h_n \in L$ и $h_n \to f$

$-\psi \le h_n$ Следователно $-\psi \le h_n \le \psi$, т.е $|h_n| \le \psi$

$h_n \to f$ $h_n \in L$. Прилагаме теоремата на Лебег и заключаваме, че $f \in L$. С това лемата е доказана.

Да докажем сега теоремата.

Означаваме с $p_n = \min(\varphi_n(x), p(x) \cdot n)$

При $n \to \infty$ $\varphi_n(x)$ е ограничена, а $p(x) > 0$ (р е функцията от сложното по-горе предположение)

Следователно за всяко фиксирано x $p_n(x) = \min(\varphi_n(x), np(x)) = \varphi_n(x) \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$

от ще лесно напишем

Но φ_n – измерими функции, $np(x)$ – измерим

Нека θ – измерима, σ – измерима. Ще докажем, че $\min(\theta, \sigma)$ е измерима.

$\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n \dots \to \theta$ $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n \dots \to$

$\underbrace{\min(\theta_n, \sigma_n)}_{\in L} \longrightarrow \underbrace{\min(\theta, \sigma)}_{\text{измерима}}$. Доказателство за почти навс. е аналогично на предложеното

Следователно абсолютната стойност на една измерима функция е пак измерима.) Следователно p_n - измерима

Означаваме $g_n = \max(p_1(x), \dots, p_n(x)) \to \varphi(x)$

$p_n \le np(x)$

$-np(x) \le g_n \le np(x) \Rightarrow |g_n| \le np(x)$ Но g_n - измерима $np(x) \in L$

От доказаната лема получаваме, че $g_n \in L$

Имаме редица от интегруеми функции $g_1, g_2 \dots g_n \dots \to \varphi$

Следователно φ е измерима. С това теоремата е доказана.

Искаме да дефинираме едно важно пространство от функции

Нека K е топологично пространство, такова че алгебрата от всичките финитни функции, дефинирани в него се апроксимира. Нека J е линеен и положителен функционал, дефиниран в съвкупността от финитни функции и L е неговото продължение до Лебегов интеграл. Нека топологичното пространство K е такова, че съдържа поне една интегруема в Лебегов смисъл функция $p(x)$, такава че $p(x) > 0$ за всяко $x \in K$

Ще дефинираме т. нар. пространство L^2 - пространството от измерими функции със сумируем квадрат.

Казваме, че f се принадлежи към L^2, когато f е измерима и $f^2 \in L$.

Може да се покаже например, че $\sqrt{p(x)}$ е измерима функция ($p(x)$ е функцията от нашето предположение)

$(\sqrt{p(x)})^2 = p(x)$ - интегруема по условие. Следователно $\sqrt{p(x)} \in L^2$

Т - Съвкупността L^2 е едно линейно пространство

Нека K е топологично пространство с наложените условия. С L^2 означаваме съвкупността от онзи измерими функции, чийто квадрат е измерима функция. Ще покажем, че L^2 е линейно пространство.

Доказателство:

1) $f \in L^2$, $g \in L^2$ $\quad (f+g) \in L^2$?

От f - измерима, g - измерима $\Rightarrow (f+g)$ - измерима

$(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$ $\quad fg$ - измерима $\quad \underbrace{|fg|}_{\text{изм. функция}} \le \underbrace{\frac{f^2+g^2}{2}}_{\in L}$

Съгласно доказаната лема $fg \in L$

Следователно $(f+g)^2 \in L$, т. е. $(f+g) \in L^2$

С това първото условие за линейно пространство е проверено

От доказателството е видно, че $\boxed{\text{ако } f \in L^2, g \in L^2, \text{то } fg \in L}$

1) Ако $f \in L^2$, $\lambda f \in L^2$

f - измерима $\Rightarrow \lambda f$ - измерима

$(\lambda f)^2 = \lambda^2 f^2 \in L^2$

Следователно L^2 е лин. пространство. С това теоремата е доказана.

В това линейно пространство ще въведем норма.

$P_1(f) = \int |f|$ - първа интегрална норма

$P_2(f) = \sqrt{\int f^2 dx}$ - втора интегрална норма

(за това е норма се проверява бързо)

Ще докажем, че е изпълнено неравенството на триъгълника. За това е достатъчно да вземем под внимание неравенството на Коши - Буняковски - Шварц.

$$\left(\int fg\right)^2 \le \left(\int f^2\right)\left(\int g^2\right)$$

$$0 \le \int (\lambda f + \mu g)^2 = \lambda^2 \int f^2 + 2\lambda\mu \int fg + \mu^2 \int g^2$$

Тая квадратична форма не си сменя знака

Следователно дискриминантата е ≤ 0

Следователно $\left(\int fg\right)^2 \le \left(\int f^2\right)\left(\int g^2\right)$ Като имаме в предвид това неравенство, вече е лесно да докажем неравенството на триъгълника.

С помощта на така въведената норма L^2 се превръща в едно метрично пространство.

Теорема: Относно нормата P_2 пространството L^2 е пълно

Нека е дадена редица от функции $f_1, f_2, \dots f_n \dots$ $f_i \in L^2$ която удовлетворява условието на Коши (за всяко $\varepsilon > 0$ е изпълнено неравенството $P_2(f_n - f_m) < \varepsilon$ за достатъчно големи m и n.) Твърдим, че съществува функция $f \in L^2$, такава че $P_2(f - f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Доказателство:

Щом съществува функция $p(x)$ в R, такава че $p(x) > 0$ за всяко $x \in R$, то съществува и $\sqrt{p(x)} > 0$ в L^2

Образуваме редицата $f_1\sqrt{p}, f_2\sqrt{p}, \dots f_n\sqrt{p}, \dots$ (1)

– понеже тези са функции от L^2, произведението $f_i\sqrt{p} \in L$

Ще покажем, че (1) е фундаментална редица спрямо нормата P_1

$$\int\left(|f_n\sqrt{p} - f_m\sqrt{p}|\,dx\right)^2 = \int\left(|f_n - f_m|\sqrt{p}\right)^2 \underset{\text{съгл. нерав. на Коши}}{\leq} \int (f_n - f_m)^2 \sqrt{p}$$

Избираме произволно $\varepsilon > 0$

За достатъчно големи m и n $\int(f_n - f_m)^2 < \varepsilon^2$ (по условие $P_2(f_n - f_m) < \varepsilon$ за дост. гол. m и n)

Следователно редицата (1) е фундаментална спрямо P_1

От тая редица може да се избере сходяща подредица почти за всяко x (вж. доказателството на теоремата на пълнотата в L)

Нека $f_{k_1}\sqrt{p}, f_{k_2}\sqrt{p}, \dots f_{k_n}\sqrt{p} \dots \underset{\text{почти навс}}{\longrightarrow} \varphi(x)$

е обикновена сходяща подредица на (1)

$\varphi(x)$ е измерима, защото $f_{k_i}\sqrt{p}$ са измерими и $\varphi(x)$ е граница на тая обикновена редица от функции

$f_{k_1}, f_{k_2}, \dots f_{k_n} \dots \to \left(\frac{\varphi(x)}{\sqrt{p}}\right)$ – измерима функция, защото е граница на обикновена редица от измерими функции

Означаваме $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{p}}$ – измерима функция.

Ще докажем, че $f \in L^2$ и $\{f_n\} \to f$ относно P_2.

Фиксираме m. Намираме стойност k_m

$\int(f_{k_n} - f_m)^2 < \varepsilon^2$ – това условие е изпълнено за достатъчно големи m и n. Оставяме $n \to \infty$

$\underbrace{(f_{k_n} - f_m)^2}_{\text{неотрицателни}} \underset{\text{почти навс}}{\longrightarrow} (f - f_m)^2$

За редицата $(f_{k_n} - f_m)^2$ прилагаме теоремата на Фату

Въз основа на тая теорема можем да твърдим, че граничната функция $(f - f_m)^2 \in L$ и $\int(f - f_m)^2 \leq \varepsilon$ (без ограничение на общността можем да смятаме, че $\varepsilon < 1$ и следователно $\varepsilon^2 < \varepsilon$) Следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува ν така, че при $m > \nu$ $\int(f - f_m)^2 \leq \varepsilon$ Следователно $\{f_n\} \to f$ относно P_2 Ще покажем, че $f \in L^2$

$\left.\begin{array}{l} f\text{ – измерима} \\ f_m\text{ – измерима} \end{array}\right\} \Rightarrow (f - f_m)$ – измерима функция

Съгласно теоремата на Фату $(f - f_m)^2 \in L$

Следователно $(f - f_m) \in L^2$

Но $f = f_m + (f - f_m)$ $f_m \in L^2$, $(f - f_m) \in L^2$

Следователно $f \in L^2$. С това доказателството е завършено

Теорема на Рис – Фишер

Т. Нека в R е дадена ортогонална и нормирана система от функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$, където $\varphi_i \in L^2$ $(i=1,\dots)$

т.е $\int \varphi_i \varphi_k = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k \\ 1 & \text{при } i = k \end{cases}$

(Да образуваме $\int \varphi_i \varphi_k$ ние можем, защото доказахме, че ако $\varphi_i \in L^2$, $\varphi_k \in L^2$, то $\varphi_i \varphi_k \in L$) Нека $f \in L^2$

Тогава можем да образуваме $a_n = \int f \varphi_n$ – n-ти Фуриеров коефициент.

Неравенството на Бесел е валидно и за пространството L^2 (доказателството е същото за тоя случай)

Следователно $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \le \int f^2$

Следователно безкрайния ред $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \dots$ е сходящ, защото редицата от частичните суми е ограничена и монотонно расте $\Rightarrow$ тя е сходяща.

Следователно за да представлява една редица $a_1, a_2, \dots a_n \dots$ редица от Фуриерови коефициенти е необходимо безкрайния ред $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \dots$ да бъде сходящ. Още по-интересно е за нас да узнаем, че е вярно и обратното:

Теорема на Рис – Фишер:

Ако е дадена редица $a_1, a_2, \dots a_n \dots$, такава че редът $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \dots$ е сходящ, то съществува функция f, за която е изпълнено условието:

$a_n = \int f \varphi_n$ и $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \le \int f^2$ за всяко n

(Не е задължително $f \in L$)

Доказателство:

Ще докажем, че съществува функция f, която освен горните условия ще удовлетворява и равенството

$$\int f^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \dots$$

Означаваме с S_n n-тата частична сума на реда $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots + a_n\varphi_n + \dots$, т. е.

$$S_n = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots + a_n\varphi_n$$

Ще докажем, че редицата S_n е сходяща относно втората интегрална норма. За тая цел ще използваме условието на Коши за сходимост на редица.

Образуваме $\int (S_{n+p} - S_n)^2 = \int \left(\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu \varphi_\nu \right)^2 =$

$$= \int \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \sum_{\mu=n+1}^{n+p} a_\nu a_\mu \varphi_\nu \varphi_\mu = \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \sum_{\mu=n+1}^{n+p} a_\nu a_\mu \int \varphi_\nu \varphi_\mu = \sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu^2$$

Но по предположение реда $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \dots$ е сходящ $\Rightarrow$ изпълнено е условието на Коши, т. е за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число ν, такова че при $n > \nu$ имаме

$$a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \dots + a_{n+p}^2 < \varepsilon$$

Следователно показахме, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число ν, такова че при $n > \nu$ $\int (S_{n+p} - S_n)^2 < \varepsilon$ за всяко цяло положително p. Следователно разглежданата редица S_n удовлетворява условието на Коши за сходимост на редица относно P_2. Следователно S_n е сходяща относно P_2. Нека $\{S_n\} \to f$ относно P_2, т е $\int (S_n - f)^2 \to 0$ относно P_2 и $f \in L^2$

Ще покажем, че функцията f притежава следните две основни свойства:

1) $a_m = \int f \varphi_m$ за всяко естествено m.

2) $\int f^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \dots$

Избираме m и го фиксираме. Нека $n > m$

Разглеждаме $\int S_n \varphi_m = \int (a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots + a_n\varphi_n)\varphi_m =$

$= a_m \int \varphi_m^2 = a_m$ Следователно $a_m = \int S_n \varphi_m$ за всяко $n > m$.

Нас ни интересува

$$\int f \varphi_m = \int f \varphi_m - \int S_n \varphi_m + \int S_n \varphi_m =$$

$$= \int (f - S_n)\varphi_m + \int S_n \varphi_m \underset{\text{Нека } n > m}{=} \int (f - S_n)\varphi_m + a_m$$

Ще покажем, че $\int (f - S_n)\varphi_m \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$\left|\int (f-S_n)\varphi_m\right|^2 \le \int (f-S_n)^2\varphi_m^2 \le \Big[\underbrace{\int (f-S_n)^2}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}\Big]\Big(\underbrace{\int \varphi_m^2}_{\text{тоя чин от } n \text{ не зависи}}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

обл. неравенството на Коши

Следователно $\int f\varphi_m \xrightarrow[n\to\infty]{} a_m$

Но тоя интеграл от n не зависи. Следователно $\int f\varphi_m = a_m$, с което свойството 1) е доказано

Да докажем сега 2)

Да разгледаме $\int (f-S_n)^2 = \left(\int f^2\right) - (a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)$ – лесно се вижда, че това равенство е изпълнено.

При $n\to\infty$ $\int (f-S_n)^2 \longrightarrow 0$ (доказахме го по-горе)

Следователно

$$a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f^2 \quad \text{т. е}$$

$$a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2+\dots = \int f^2$$

С това всичко е доказано.

Да се спрем на една особено важна ортогонална система от функции. Ще разгледаме т. нар. „тригонометрична система"

$$\cos 0,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x,\ \dots\ \cos nx\ \dots \qquad (1)$$
$$\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \dots\ \sin nx,\ \dots$$

Тия функции разглеждаме в интервал с дължина 2π. В тоя интервал тия функции образуват ортогонална система, която не е нормирана, но която ние лесно можем да нормираме. Това е най-старата и най-важната ортогонална система. Основния въпрос, който ни интересува по-нататък е да посочим достатъчни условия, при които функциите се разлагат в редове по такива системи

$$f(x) = a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \dots$$
$$+ (a_n\cos nx + b_n\sin nx) + \dots$$ – тригонометрични редове.

Ако тия редове са такива, че коефициентите в тях се образуват по правилото на Ойлер, такива редове се наричат редове на Фурие.

Редове на Фурие

Да вземем произволен интервал с дължина 2π например нека той е $[-\pi,\pi]$. Да разгледаме функциите: 1, $\cos x$, $\cos 2x$, ... $\cos nx$ ..

$\sin x$, $\sin 2x$, ... $\sin nx$ ..

Тия функции във всеки интервал с дължина 2π образуват ортогонална система, която обаче не е нормирана. Да докажем, че тая система от функции е ортогонална. За целта ще разгледаме един случай (другите случаи се разглеждат аналогично)

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx \overset{?}{=} 0$ при $m \ne n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

(тук лесно се вижда, че $m-n\ne 0$, $m+n\ne 0$)

По аналогичен начин се проверява, че всеки две произволни функции от тая система са ортогонални помежду си. Тая система е ортогонална, обаче не е нормирана.

За да я направим нормирана всяка функция трябва да умножим с подходящ множител.

$$\int_{-\pi}^{\pi}(L^2\cos^2 nx)\,dx = 1 \qquad \int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)\,dx = \frac{2}{L^2}$$

$$2\pi + \frac{1}{2}\sin 2nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{L^2} \qquad 2\pi = \frac{2}{L^2} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{\sqrt{\pi}}}$$

При $n=0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} L^2 1\,dx = 1 \qquad 2\pi L^2 = 1 \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$$

Аналогично и за $\sin nx$ получаваме множител $\boxed{L = \frac{1}{\sqrt{\pi}}}$

Окончателно нашата система от ортогонални тригонометрични функции след нормирането изглежда така:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}},\ \dots\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \dots$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}\ \dots\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \dots$$

Основния въпрос, който ще ни интересува по-нататък е въпроса за достатъчните условия, при които една функция f се развива в ред на Фурие.

Нека $f(x)$ е функция, която искаме да развием във Фуриеров ред, т.е f да можем да представим във вида:

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \left(\frac{a_1\cos x}{\sqrt{\pi}} + \frac{b_1\sin x}{\sqrt{\pi}}\right) + \left(\frac{a_2\cos 2x}{\sqrt{\pi}} + \frac{b_2\sin 2x}{\sqrt{\pi}}\right) + \dots$$

$$+\left(\frac{a_n\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \frac{b_n\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right) + \dots,$$ където a_n и b_n са Фуриеровите коефициенти, а именно:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \quad \text{при } n=0$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \quad n = 1, 2, \dots$$

За да можем да се развие функцията $f(t)$ в ред на Фурие, не е достатъчно $f(t)$ да бъде непрекъсната в $[-\pi,\pi]$.

Лема на Риман:

Нека $f(t)\in L^2$. В тоя смисъл при случай е валидно неравенството на Бесел, т.е

$$a_0^2 + (a_1^2+b_1^2) + \dots + (a_n^2+b_n^2) \le \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt$$ за всяко n

Следователно безкрайния ред $a_0^2 + (a_1^2+b_1^2) + \dots + (a_n^2+b_n^2) + \dots$ е сходящ. Следователно общият член на тоя ред клони към 0, т.е $a_n^2+b_n^2 \to 0$. Последното ни дава, че $a_n \to 0$ и $b_n \to 0$, т.е получихме следния резултат: Коефициентите на Фурие a_n, b_n за функция f от L^2 клонят към 0 при $n\to\infty$. Тоя резултат се нарича „Лема на Риман".

Лебег допълни тоя резултат, като установи, че Фуриеровите коефициенти на произволна функция $f\in L$ клонят към нула. (за тия коефициенти можем да говорим в тоя случай, защото $f(t)\in L$ по предположение, $\cos nt \in L$ и е ограничена и $\sin nt \in L$ и е ограничена. Следователно $f(t)\cos nt \in L$ и $f(t)\sin nt \in L$)

Ако ние искаме да се ограничим с интервал на $[-\pi,\pi]$,

ние можем да разлагаме всякакви функции.
Ако ние обаче искаме да разлагаме функцията $f(t)$ въз основа съвкупността от всичките реални числа, ние ще искаме тая функция да е периодична с период 2π
Ние обаче досега ще ограничим нашите разлагания само в интервала $[-\pi, \pi]$

Достатъчни условия за разлаганеемост на функция в ред на Фурие

Означаваме $S_n = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \left(\frac{a_1\cos x}{\sqrt{\pi}} + \frac{b_1 \sin x}{\sqrt{\pi}}\right) + \dots + \left(\frac{a_n \cos nx}{\sqrt{\pi}} + \frac{b_n \sin nx}{\sqrt{\pi}}\right)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx\right]dt$$

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt$$

$$\left(a_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\cos k(t-x)\right]\right)$$

$k = 1, 2, \dots n \dots$

От друга страна $\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$
(валидно при $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$) (тая формула се доказва по индукция или чрез извършване на действията.)
Следователно, използвайки тая формула за S_n получаваме:

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt$$

(при тия разсъждения предполагаме, че функцията $f(t)$ е дефинирана в интервала $[-\pi, \pi]$)
Да си мислим сега, че функцията $f(t)$ е продължена като периодична функция с период 2π (у съвкупността от всичките реални числа)

Но тогъв начин лесно се вижда, че подинтегралната функция е периодична върху цялата реална ос с период 2π
(Ние установяхме следното свойство на периодичните функции: Нека функцията $\varphi(t)$ е дефинирана в $[-\infty, \infty]$, интегруема е във всеки краен интервал и е периодична с период ω, т. е. $\varphi(t) = \varphi(t+\omega)$ за всяко $t \in [-\infty, \infty]$
Тогава функцията $\Psi(\xi) = \int_{\xi}^{\xi+\omega} \varphi(t)\,dt$ не зависи от ξ
Когато $\varphi(t)$ е непрекъсната ξ функция, това е очевидно. Диференцирайки спрямо ξ по теоремата на Лайбницови Нютон имаме $\Psi'(\xi) = \varphi(\xi+\omega) - \varphi(\xi) = 0$. Следователно $\Psi'(\xi) = const$, ако функцията е непрекъсната. Това обаче е валидно не само тогава, когато функцията $\varphi(t)$ е непрекъсната функция. Може да се докаже, че това е верно, когато φ е произволна интегруема в Риманов смисъл функция, която удовлетворява горните условия. Може да се отиде и още по-далеч, като се покаже, че това е верно и при произволни периодични и интегруеми в Лебегов смисъл функции)
Щом подинтегралната функция е периодична с период 2π, можем да напишем следното:

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{\eta}^{\eta+2\pi}\dots = \frac{1}{\pi}\int_{\xi-\pi}^{\xi+\pi}\dots$$

ξ можем тук да избираме произволно. Нека $\xi = x$
Тогава

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt$$

Означаваме $t - x = u \Rightarrow t = x + u$
$x - \pi - x = u_0$ $\quad x + \pi - x = u_1$ Извършваме смяната $t - x = u$ в горния интеграл и получаваме:

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}u\right)}{2\sin\frac{u}{2}}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+u)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-u)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \text{ , защото}$$

$$\int_{-\pi}^{0} f(x+u)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du = \int_{0}^{\pi} f(x-v)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}v}{2\sin v}\,dv$$

(в тоя интеграл сме направили смяната $u = -v$)

Окончателно

$$\boxed{S_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[f(x+u)+f(x-u)\right]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}\,du}$$

– това представяне е намерено на времето от Дирихле

Да приложим тая формула в специалния случай, когато $f(t) = 1$

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\,dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos k(t-x)\,dt}_{=0} =$$

(сумата, (1) е ортогонален във всеки интервал с дължина 2π), защото

$$= \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Следователно когато $f(t) = 1$, то $S_n = 1$

От формулата на Дирихле получаваме, че в тоя случай

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\,du = 1 \qquad (2)$$

Може да се случи Фуриеровият ред на една функция да бъде сходящ, обаче неговата сума да не бъде $f(x)$

Да видим при какви условия реда е сходящ и сумата му е l (в тоя случай сумата на реда можеда бъде число, различно от $f(t)$)

От (2) имаме $l = \frac{l}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\,du$

Да изучим $S_n - l$.

$$S_n - l = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[l(x-u) + f(x-u) - 2l\right]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \quad (3)$$

Ако искаме да установим, че е сума на реда, трябва $S_n - l \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Принцип за локализацията

Нека са дадени две функции $f(x)$ и $g(x)$, дефинирани в интервала $[-\pi,\pi]$ и принадлежащи на L^2 (приемаме е верно и за функции от L. Ако искаме обаче всичко у нас да бъде строго, тие трябва да се ограничим с функции интегруеми в Риманов смисъл.) Нека точката $x_0 \in [-\pi,\pi]$ е такава, че около тая точка съществува околност, в която разглежданите две функции съвпадат.

При тия предположения, ако Фуриеровото развитие на една от тия функции в точката x_0 е сходящо и има сума l, то за другата функция Фуриеровото развитие в точката x_0 е пак сходящо и има същата сума l.

Тие принципи ще докажем, когато $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в Риманов смисъл функции.

Доказателство:

Нека с $S_n(x_0)$ означим $n+1$-вата частична сума на Фуриеровото развитие на функцията $f(x)$

Означаваме със $\sigma_n(x_0)$ – $n+1$-вата частична сума на $g(x)$

$$\sigma_n(x_0) - l = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\left[g(x_0+u)+g(x_0-u)\right]-2l\right\}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \quad (4)$$

От (3) изваждаме (4) и получаваме:

$$S_n(x_0)-\sigma_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left[f(x_0+u)+f(x_0-u)-g(x_0+u)-g(x_0-u)\right]}{2\sin\frac{u}{2}}\sin\frac{2n+1}{2}u\,du$$

Да вземем произволно положително число δ с. π

За представим горния интеграл във вида $\int_0^{\pi} = \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}$

Във втория интеграл полагаме $\frac{u}{2} = v$

$\int_{\delta}^{\pi} (\ldots\ldots) \sin(2n+1)v\,dv \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ съгласно лемата на Риман

абсолютно интегруема функция

Съществуването на границата $\lim\limits_{n\to\infty}\left[S_n(x_0)-\sigma_n(x_0)\right]$ се определя единствено от поведението на интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left[f(x_0+u)+f(x_0-u)-g(x_0+u)-g(x_0-u)\right]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\,du,$$

но в тоя интеграл влизат само тия значения на функциите $f(x)$ и $g(x)$, които отговарят на изменение на аргумента u в интервала $[x_0-\delta, x_0+\delta]$

Следователно можем да изберем $\delta>0$ толкова малко, че когато u се мени в интервала $(0,\delta]$ последния интеграл да бъде 0 (това можем да направим, защото в достатъчно малки околности на точката x_0 функциите $f(t)$ и $g(t)$ съвпадат)

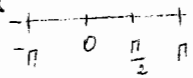
Следователно $S_n(x_0)-\sigma_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ Но $S_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

Следователно $\sigma_n(x_0) \to l$. С това „принципа за локализацията" е доказан напълно.

За да вернем към прекъснатото изследване за сходимост на Фуриеровия ред

$$S_n - l = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)-2l}{u}\cdot\frac{u}{2\sin\frac{u}{2}}\sin\frac{2n+1}{2}u\,du$$

$f(t)$ е функция дефинирана в интервал с дължина на 2π. Ако $f(t)$ е дефинирана в интервал с по-малка дължина, продължаваме я като 0 до интервал с дължина на 2π)



В последния интеграл полагаме $u = 2v$ и получаваме

$$S_n - l = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{f(x+2v)+f(x-2v)-2l}{2v}\cdot\frac{2v}{2\sin v}\sin(2n+1)v\,dv$$

Означаваме с $\psi(v)$ функцията:

$$\psi(v) = \begin{cases}\dfrac{f(x+2v)+f(x-2v)-2l}{2v}\cdot\dfrac{2v}{2\sin v} & \text{при } 0\le v\le\pi\\ 0 & \text{в останалата част от } [-\pi,\pi]\end{cases}$$

Ако функцията $\psi(v)$ е интегруема,

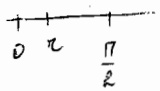
$$S_n - l = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(v)\sin(2n+1)v\,dv \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

– тъй като друг само по числов множител се отличава от Фуриеровия коефициент и съгласно лемата на Риман клони към 0.

Следователно в тоя случай редът

$a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + \cdots$ е сходящ и сумата му е l.

При какви условия функцията $\Psi(v)$ е интегруема?



Да разгледаме

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)-2l}{u} \cdot \frac{u}{2\sin\frac{u}{2}} \sin\frac{2n+1}{2}u\,du$$

Ако $u \to 0$ функцията $\frac{1}{u}$ расте неограничено. Тая функция обаче е непрекъсната във всеки интервал $[r, \frac{\pi}{2}]$ $(r>0;\ r<\frac{\pi}{2})$ и ограничена в него. Следователно тя е интегруема в Риманов смисъл във всеки такъв интервал. Ако се случи да съществува константа A, такава че $\Delta = \left|\frac{f(x+u)+f(x-u)-2l}{u}\right| \le A$ (1) и изразът в модула е функция непрекъсната почти навсякъде и ограничена, то тая функция е интегруема в Риманов смисъл. Функцията $\frac{u}{2\sin\frac{u}{2}}$ дефинираме като сума непрекъсната функция в $[0, \frac{\pi}{2}]$. Тая функция е интегруема и ограничена в разглеждания интервал. Следователно функцията $\Psi(v)$ е интегруема в Лебегов смисъл. Щом тая функция е интегруема, Фуриеровите коефициенти клонят към 0 (по лемата на Риман) за тая функция. Следователно $S_n - l \to 0$, т. е в тоя случай реда е сходящ и сумата му е l.

При какви условия $\left|\frac{f(x+u)+f(x-u)-2l}{u}\right| \le A$?
(при какви условия изразът е ограничен?)

Нека функцията f удовлетворява условието на Липшиц. Тогава имаме изпълнено

$|f(x+h)-f(x)| \le B|h|$. Ако $h = u$, имаме $|f(x+u)-f(x)| \le B|u|$ Ако $h = -u$, имаме $|f(x-u)-f(x)| \le B|u|$

Нека $l = f(x)$ (в тоя случай, когато $f(x)$ удовлетворява условието на Липшиц, Фуриеровият ред за съответната функция не само ще бъде сходящ, но неговата сума ще бъде $f(x)$ т.е $f(x)$ ще бъде разложима във Фуриеров ред.)

$$\Delta = \left|[f(x+u)-f(x)] + [f(x-u)-f(x)]\right| \le 2\frac{B|u|}{|u|} = 2B$$

Следователно намерихме в тоя случай една горна граница за израза Δ. Следователно в тоя случай функцията $f(x)$ е разложима във Фуриеров ред.

Ще сложим още едно допълнително условие, при което реда на Фурие е сходящ.

Достатъчно е да съществуват константа l_1, такива че неравенството $|f(x+u)-l_1| \le B|u|$ да бъде изпълнено при $u>0$ и константа l_2, такива че $|f(x-u)-l_2| \le B|u|$ при $u<0$

Тогава за $l = \frac{l_1+l_2}{2}$ ще бъде изпълнено (1), т. е в тоя случай реда на Фурие е сходящ и сумата му ще бъде $l = \frac{l_1+l_2}{2}$

Ако $t \to x$, $u \to 0$ $\quad |f(x+u)-l_1| \to 0$

$l_1 = \lim\limits_{\substack{t\to x\\ t>x}} f(t) = f(x+0)$ $\qquad$ Аналогично $l_2 = \lim\limits_{\substack{t\to x\\ t<x}} f(t) = f(x-0)$

В тоя случай, ако са изпълнени условията $|f(x+u)-l_1| \le B|u|$, $|f(x-u)-l_2| \le B|u|$ сумата на реда е $l = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

Не е нужно условието на Липшиц да бъде изпълнено за целия интервал. За онази x, за които това условие е изпълнено, реда е сходящ и сумата му е тая сума.

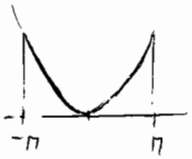
II - Условие на Дирихле

Ако функцията $f(x)$ е монотонна в интервала $[-\pi, \pi]$, Фуриеровото разложение е сходящо и сумата му се явява $l = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ - доказателство на тоя факт няма да даваме

Дефиниция: Функция, която може да се представи като

разлика на две монотонно растящи функции и нарича функция с ограничена вариация.
Следователно всяка функция с ограничена вариация е развиваема във Фуриеров ред.

Пример: Да разгледаме функцията $f(x) = x^2$ в интервала $[-\pi, \pi]$. Извън тоя интервал тая функция да продължим като периодична с период 2π.



$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$

Първата производна на тая функция е ограничена в $[-\pi,\pi]$ следователно функцията удовлетворява условието на Липшиц. Следователно функцията е развиваема във Фуриеров ред.

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots$$

$$x^2 = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots \qquad / . \cos nx$$

$$x^2 \cos nx = a_0 \cos nx + a_1 \cos x \cos nx + \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx$$ (използуваме се факта, че тригонометричната система е ортогонална.

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, d \sin nx = -\frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} x\, d \cos nx = \frac{2}{n^2} x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx}_{=0} =$$

$$= \frac{4\pi}{n^2} \cos n\pi = (-1)^n \cdot \frac{4\pi}{n^2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2}\, dx = \begin{cases} \pi & \text{при } n \neq 0 \\ 2\pi & \text{при } n = 0 \end{cases}$$

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx \quad \Rightarrow b_n = 0$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \left| \frac{x^3}{3} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3} = a_0 \cdot 2\pi \quad \Rightarrow a_0 = \frac{\pi^2}{3}$$

Окончателно развитието добива вида:

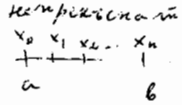
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx$$

В тая формула полагайки $x = \pi$ добиваме:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

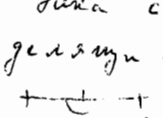
Общо условие за интегруемост в Риманов смисъл

Т. За да бъде една функция f в комплектен интервал интегруема в Риманов смисъл е необходимо и достатъчно тя да бъде ограничена и почти навсякъде непрекъсната.



Разглеждаме полузатворени интервали $x_{i-1} \le x < x_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots n)$

Нека с $\alpha = (x_0, x_1, \dots x_n)$ означим системата от делящи точки. Ще дефинираме функции $M_\alpha(x)$ и $m_\alpha(x)$



Избираме произволно точката x в $[a, b]$. Измежду тия подинтервали $x_{i-1} \le x \le x_i$ има само един, който съдържа точката x. Да го означим с Δ_i. Дефинираме горестоящите две функции по следния начин:

Под $M_\alpha(x)$ разбираме

$$M_\alpha(x) = \sup_{t \in \Delta_i} f(t)$$

Под $m_\alpha(x)$ разбираме $m_\alpha(x) = \inf_{t \in \Delta_i} f(t)$

Доказателство на общото условие за интегруемост в Риманов смисъл (теорема на Лебег) се извършва с помощта на следните две спомагателни теореми.

1. Теорема на Дарбу

Да вземем обикновена редица от системи от делящи точки $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ (или с едини такива), такива че за всяка единична система редицата от максималните дължини на подинтервалите клони към нула

$$\delta_{max} = \sup(x_i - x_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n \ldots \to 0$$

$M_{\alpha_i}(x)$ – интегруема функция. Следователно можем да образуваме $\int M_{\alpha_i}(x)\,dx$. След извършване на съответните изчисления, получаваме:

$$S_{\alpha_i} = \int_a^b M_{\alpha_i}(x)\,dx$$

$$s_{\alpha_i} = \int_a^b m_{\alpha_i}(x)\,dx$$

$\{\delta_n\}$ можем да изберем такъв, че $\{\delta_n\} \to 0$ и всяка система от делящи точки да съдържа следващата т.е. $\alpha_n \supset \alpha_{n+1}$.

Редицата $m_{\alpha_i}(x)$ – монотонно расте, а редицата $M_{\alpha_i}(x)$ – монотонно намаля

$m_{\alpha_i}(x) \to m(x)$

$M_{\alpha_i}(x) \to M(x)$

Съгласно теоремата на Жорж-Леви

$$\int_a^b M_{\alpha_i}(x)\,dx \to L(M(x)) \text{ и } \int_a^b m_{\alpha_i}(x)\,dx \to L(m(x))$$

Теоремата на Дарбу казва, че:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = L(M(x)) \quad \text{и} \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = L(m(x))$$

2. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \ldots$ – изброимо множество от системи. Обединението от всичките делящи точки на тези системи е пак изброимо множество. Да означим това изброимо множество от точки с A. Ако $x_0 \in A$, за да бъде $f(x)$ непрекъсната в точката x_0 е необходимо и достатъчно $M(x_0) = m(x_0)$

Интересува ни при какви условия $f(x)$ е интегруема функция?

Образуваме $\overline{\int_a^b} - \underline{\int_a^b} = L(\underbrace{M(x) - m(x)}_{\geq 0}) = 0$

($m(x) \leq M(x)$ за всяко x)

Но това е изпълнено, съгласно доказаната теорема само тогава, когато $M(x) - m(x) = 0$ почти навсякъде.

Тъй като $M(x) = m(x)$ почти навсякъде, то $f(x)$ съгласно 2 е непрекъсната почти навсякъде.

Следователно за да бъде $f(x)$ интегруема е необходимо и достатъчно да бъде непрекъсната почти навсякъде и ограничена

Съществуване на непрекъснати наредени тела като следствие от съществуването тялото на рационалните числа

Предполагаме, че теорията на рационалните числа по един или друг начин е вече изградена и отпуск на базата на тялото на рационалните числа вече ще предпримем нашите разсъждения. В тялото на рационалните числа принципът за непрекъснатост не е валиден. Достатъчно е да имаме една безкрайна съвкупност в тялото на рационалните числа, тя можем да изградим.

Нека тя е дадена редица от рационални числа $a_1, a_2, \ldots a_n$. Ще казваме, че тая редица е фундаментална, ако тя удовлетворява условието на Коши, т.е. при всяко избрано положително рационално число ε е изпълнено $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при всички достатъчно големи стойности на n и m.

Казваме, че две редици $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ са
$b_1, b_2, \ldots b_n \ldots$

конфинални помежду си, ако при всяко избор на положителното рационално число ε е изпълнено $|b_n - a_n| < \varepsilon$ при всички достатъчно големи стойности на n, т.е. ако $b_n - a_n \to 0$. Не е трудно да се види, че ако едната от две конфинални помежду си редици е фундаментална, то и другата е фундаментална.

Едно множество α от фундаментални редици ще наричаме Канторови класи от фундаментални редици, ако:

1) Всеки две редици от α са конфинални помежду си
2) Ако някоя редица е конфинална с редица от α, тя нак принадлежи на α

Да ли има такива Канторови класи?

Избираме произволна фундаментална редица (избираме произволна сходяща редица от рационални числа). Да разгледаме съвкупността α от всички редици, които са конфинални с дадената редица. Това е една Канторова класа от фундаментални редици.

Конфинални помежду две редици е един релация. Тая релация е един релация на еквивалентност – симетрична, рефлексивна, транзитивна)

Да разгледаме съвкупността K от всичките Канторови класи – това е нашето пространство.

Ще дефинираме операциите събиране и умножение и релацията равенство между Канторови класи.

Казваме, че две Канторови класи са равни помежду си, ако те се съставят от едни и същи редици.

Събиране:

Нека α и β са два Канторови класи. Избираме една редица $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ от α и една редица $b_1, b_2, \ldots b_n \ldots$ от β. Образуваме редицата $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots a_n + b_n$ (Не е трудно да се види, че тая редица е фундаментална. И наистина каквото и да бъде положителното рационално положително число ε, ще имаме $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ при достатъчно големи стойности на m и n и следователно $|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.)

Да означим с γ Канторовата класа, съдържаща тая редица. По дефиниция под $\alpha + \beta$ ще разбираме класата γ.

Във връзка с такъв дадената дефиниция възниква въпроса за корекция на дефиницията.

$\alpha \ni (a_1', a_2', \ldots a_n' \ldots)$ Ще докажем, че $\gamma \equiv \gamma'$

$\beta \ni (b_1', b_2', \ldots b_n' \ldots)$ Ще покажем, че $a_1' + b_1', a_2' + b_2', \ldots a_n' + b_n'$

$\gamma' \ni (a_1' + b_1', a_2' + b_2', \ldots a_n' + b_n')$ (Освен това в сила е свойството, че две Канторови класи имат обща редица, то се виждат

Ще покажем, че редиците $a_1+b_1, a_2+b_2, \dots a_n+b_n, \dots$ и $a_1'+b_1', a_2'+b_2', \dots a_n'+b_n', \dots$ са конфинални, т.е. че $(a_n+b_n)-(a_n'+b_n') = (a_n-a_n')+(b_n-b_n') \longrightarrow 0$

Но това е очевидно. Следователно двете редици са конфинални. Следователно дефинираната за сбора на две Канторови класи е коректна.

Умножение:

Нека α и β са две Канторови класи.

$\alpha \ni (a_1, a_2, \dots a_n \dots)$ Образуваме нова редица $(a_1b_1, a_2b_2 \dots a_nb_n)$

$\beta \ni (b_1, b_2 \dots b_n \dots)$ Тази образувана нова редица е фундаментална (вземи се под внимание, че всяка фундаментална редица е ограничена) Да означим с δ Канторовата класа, съдържаща тази новообразувана редица. По дефиницията под $\alpha\beta$ ще разбираме δ. И тук възниква въпрос за коректност на дадената дефиниция, но доказателството на този факт е отново така просто, както и при сума.

По такъв начин в множеството K от всички Канторови класи имаме дефинирани две операции и една релация. Относно така дефинираните понятия K е комутативно тяло. Проверката на този факт не е свързана с принципни трудности. Кой е нулевият елемент на това тяло? Да разгледаме редицата $0, 0, 0, \dots 0, \dots$ – тази редица удовлетворява условието на Коши $\Rightarrow$ има Канторова класа, която я съдържа. Тази класа означаваме с 0. (Нулевата класа е съвкупността от всички редици, които клонят към 0)

В тялото K искаме да дефинираме наредба. За целта ще кажем кои Канторови класове ще наричаме положителни. Една Канторова класа ще наричаме положителна, ако

поне за една нейна редица $a_1, a_2, \dots a_n \dots$ можем да намерим такова положително рационално число ε_0, че да имаме $a_n \geq \varepsilon_0$ за достатъчно големи n.

В такъв случай и при всеки друг избор на редицата $a_1', a_2', \dots a_n' \dots$ от α съществува положително число η, за което е изпълнено неравенството $a_n' \geq \eta$ при всички достатъчно големи стойности на n. За да се убедим в това, извършваме следните разсъждения:

$|a_n'-a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ за достатъчно големи n, т.е.

$-\frac{\varepsilon}{2} \leq a_n'-a_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$ Тогава $a_n' = (a_n'-a_n)+a_n \geq$

$\geq -\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ за достатъчно големи n. Достатъчно е да положим $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$ и веднъж, че $a_n' \geq \eta$

Не е трудно да се покаже, че множеството от така дефинираните положителни класове удовлетворяват условията, които трябва да удовлетворяват положителните елементи на едно наредено тяло.

Казваме, че един клас е неотрицателен, ако той е положителен, или е нулевия клас

Теорема: За да принадлежи една фундаментална редица $a_1, a_2, \dots$ към неотрицателен клас е необходимо и достатъчно при всеки избор на положителното число ε да бъде изпълнено неравенството $a_n > -\varepsilon$ при всички достатъчно големи стойности на n.

Доказателство:

I – Да допуснем, че нашата редица принадлежи към неотрицателния класа α.

Ако $\alpha > 0$ (т.е. α е положителен клас), съществува $\eta > 0$, такова че неравенството $a_n > \eta$ е изпълнено за достатъчно големи стойности на n.

Но $\eta > 0$, $a - \varepsilon < 0$. Следователно $\eta > -\varepsilon$.
Оттук $a_n > \eta > -\varepsilon$ за достатъчно големи n.
Ако $\alpha = 0$, то при всеки избор на положителното рационално число ε е изпълнено неравенството $|a_n| < \varepsilon$ за достатъчно големи n, което ни дава, че е изпълнено условието $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$ за достатъчно големи n. И така интересуващото ни условие е необходимо, за да принадлежи дадената редица към неотрицателен клас.
Ще покажем, че това условие е и достатъчно.
II - Нека е дадена фундаментална редица $\{a_n\}$, такава че неравенството $a_n > -\varepsilon$ е изпълнено за всички достатъчно големи стойности на n. Да означим с α канторовата класа, съдържаща тая редица. Ще докажем, че $\alpha \geq 0$, т.е ще докажем, че $\alpha > 0$ или $\alpha = 0$. Да допуснем, че условието $\alpha > 0$ не е изпълнено. Тогава ще докажем, че е изпълнено условието $\alpha = 0$. Какво значи класа α да не е положителен?
Това значи, че при всеки избор на положителното рационално число ε неравенството $a_m \geq \frac{\varepsilon}{2}$ се нарушава за безбройно много стойности на m. Да означим тези стойности с $m_1, m_2, m_3, \ldots$, т.е. $a_{m_k} < \frac{\varepsilon}{2}$ при $k = 1, 2, \ldots$
От друга страна, ако p и q са достатъчно големи, понеже редицата е фундаментална, имаме $|a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Следователно за всички достатъчно големи p и k имаме изпълнено неравенството $|a_p - a_{m_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$+\begin{array}{|l} a_p - a_{m_k} < \frac{\varepsilon}{2} \\ a_{m_k} < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

$$a_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

За всички достатъчно големи p имаме $a_p < \varepsilon$. От друга страна (по условие) за всички достатъчно големи p имаме $a_p > -\varepsilon$. Следователно за $\forall$ достатъчно

големи p имаме $|a_p| < \varepsilon$, т.е. $\alpha = 0$. С това достатъчността е установена.
Ще докажем, че в нареденото тяло R на Канторовите класове е валиден принципът за непрекъснатост, т.е. ще покажем, че ако M е непразно и ограничено отгоре съвкупност от Канторови класи, то тая съвкупност притежава точна горна граница.
Ще казваме, че едно рационално число g е ясно за M ако при всеки избор на положителното рационално число ε и при всеки избор на редицата $(x_1, x_2, x_3 \ldots)$, която принадлежи на някой клас $\xi \in M$, е изпълнено неравенството $x_n < g + \varepsilon$ за всички достатъчно големи стойности на n. Рационално число, което не е ясно, ще наричаме ляво. Ще докажем, че съществуват както десни, така и леви числа.
За тази цел разглеждаме едно ограничено отгоре множество M от Канторови класове ξ и с α означаваме една нова горна граница. Ще покажем, че съществуват десни числа. Нека g е една горна граница на една редица $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ от α ($g = \sup a_n$), нека ξ е един Канторов клас от M и нека $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$ е една редица от ξ. В такъв случай имаме $\xi \leq \alpha$ и следователно при всеки избор на положителното рационално число ε ще имаме $a_n - x_n > -\varepsilon$ при всички достатъчно големи n. Оттук $g - x_n \geq a_n - x_n > -\varepsilon$ за всички достатъчно големи n. Оттук получаваме $x_n < g + \varepsilon$, т.е числото g е ясно.
Ще покажем, че съществуват и леви числа.
Щом M не е празно, съществува клас $\eta \in M$. $\eta \ni (\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n \ldots)$ $\tau = \inf \eta_n = \inf \eta_n$ Означаваме

с p рационално число, такова че $p < r$. Ще покажем, че числото p не е дясно. Избираме числото ε така че $p+\varepsilon < r$ ($0 < \varepsilon < r-p \Rightarrow p+\varepsilon < r$)
Следователно $p+\varepsilon < r_n$ за всяко n.
Следователно съществува $\varepsilon > 0$ и такава редица $r \in M$, че неравенството $r_n < p+\varepsilon$ е грубо е нарушено за достатъчно големи n. и $0 < \varepsilon < r-p$, т.е числото p не е дясно. С това показахме съществуването на леви числа.
Ако числото d е дясно, всяко число d', което е по-голямо от d и то е дясно. $d \le d'$ $x_n < d'+\varepsilon$ – това неравенство е изпълнено за достатъчно големи n, тъй като $x_n < d+\varepsilon$ за достатъчно големи n. Ако d е дясно число, а p – ляво то $p < d$ (левите числа са винаги по-малки от десните)
Ако допуснем, че неравенството $p < d$ е нарушено, ще излезе, че p е дясно число.
Избираме произволно дясно число и го означаваме с d_1. Избираме произволно ляво число с p_1. Получения интервал делим на две части. И в двата случая избираме половини, такава че левия край е ляво число, а десния край е дясно число. (от двете половини единия има това свойство.) Делим тоя интервал на две части и пак вземаме онзи половина. Тоя процес продължаваме неограничено. Получаваме монотонно растяща редица от леви числа и монотонно намаляваща редица от десни числа. Тия две редици са конфинални помежду си. ($d_n - p_n = \frac{d_1-p_1}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ редиците са конфинални)
Тия две редици са и фундаментални (удовлетворяват условието на Коши.) (това ще докажем накрая)
Понеже тия две редици са фундаментални, всяка една

от тях определя Канторова класа и понеже са конфинални, те принадлежат към една и съща класа.
Означаваме тая класа с δ, т.е $\delta \ni (d_1, d_2, \dots d_n \dots)$; $\delta \ni (p_1, p_2 \dots p_n \dots)$
Ще докажем, че: 1) δ е горна граница за M
2) δ е най-малката горна граница
1) Нека $\xi \in M$ е произволна класа от M. Искаме да докажем, че $\xi \le \delta$, т.е че $\delta - \xi \ge 0$
$\delta \ni (d_1, d_2 \dots d_n \dots)$ $\xi \ni (x_1, x_2, \dots x_n \dots)$
$\delta - \xi \ni (d_1 - x_1, d_2 - x_2, \dots d_n - x_n \dots)$ $\delta - \xi \overset{?}{\ge} 0$
Избираме произволно $\varepsilon > 0$ и разглеждаме неравенството $d_n - x_n > -\varepsilon$. Ако успеем да докажем, че $d_n - x_n \ge -\varepsilon$ за достатъчно големи n, изпълнено е малкото, защото доказахме $\delta - \xi \ge 0$ и следователно всичко ще бъде свършено.
Си образуваме $\frac{\varepsilon}{2}$ и да фиксираме m. В такъв случай при достатъчно големи стойности на m ще имаме $x_m < d_m + \frac{\varepsilon}{2}$ за достатъчно големи m, защото числото d_m е дясно. Но редицата $d_1, d_2, \dots d_n \dots$ е фундаментална. Следователно $|d_n - d_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ за достатъчно големи m и n
$-\frac{\varepsilon}{2} < d_n - d_m < \frac{\varepsilon}{2}$ за достатъчно големи m и n.

$$+\left|\begin{array}{l} x_n < d_m + \frac{\varepsilon}{2} \\ d_m - d_n < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right.$$

$x_n - d_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Следователно $d_n - x_n > -\varepsilon$ за достатъчно големи n.
Следователно δ е една горна граница за M.

2) Ще покажем, че δ е точната горна граница за M. Нека $\gamma < \delta$. Ще покажем, че δ е точна горна граница, т.е че γ не е горна граница за M.
$\delta - \gamma > 0$ $\delta \ni (p_1, p_2, \dots p_n \dots)$ $\gamma \ni (y_1, y_2 \dots y_n \dots)$

$\xi - \delta^* \ni (p_1 - y_1, p_2 - y_2, \dots p_n - y_n \dots)$ Но $\xi - \delta^* > 0$
Съществува $\varepsilon_1 > 0$, такова че за достатъчно големи n е изпълнено неравенството $p_n - y_n > \varepsilon_1$. (1)
Но редицата $y_1, y_2 \dots y_n \dots$ удовлетворява условието на Коши. Следователно $|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ за достатъчно големи m и n. Избираме n толкова голямо, че $p_n - y_n > \varepsilon_1$ и при $m > n$ да бъде изпълнено неравенството $|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Фиксираме n

$$-\frac{\varepsilon_1}{2} < y_n - y_m < \frac{\varepsilon_1}{2} \quad (2) \qquad y_n - y_m > -\frac{\varepsilon_1}{2}$$ (n - фиксирано)

p_n - лявото число => не е ясно => съществува число $\varepsilon_2 > 0$ и съществува такава редица $(x_1, x_2 \dots x_n \dots) \in \xi \in M$, че неравенството $x_s < p + \varepsilon_2$ е нарушено за безкрайно стойности на s. Означаваме с s_k такива стойности на индекса за които $x_{s_k} \geqslant p_n + \varepsilon_2$. (3) Но тая редица е също така фундаментална. Следователно $|x_m - x_{s_k}| < \frac{\varepsilon_2}{2}$ за достатъчно големи m и k, т.е. $x_k - x_{s_k} > -\frac{\varepsilon_2}{2}$ (4)
Да съберем почленно неравенствата (1), (2), (3) и (4) и получаваме: $x_m - y_m > \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2}$ Следователно при всяко достатъчно голямо m.
$x_m - y_m \in \xi - \delta^* > 0$, т.е $\xi > \delta^*$. Но $\delta^* \in M$, $\xi \in M$.
С това доказателството на теоремата е завършено, защото по тоя начин показахме, че δ^* не е горна граница за M. И така δ е най-малката горна граница за M.
По такъв начин установихме, че в тялото на Канторовите класове е валиден принципът за непрекъснатостта.
Ще покажем, че редиците q_n и p_n са фундаментални. Достатъчно е да извършим това за едната редица, а за другата това следва автоматично, тъй като тия две

редици са конфинални помежду си. Да разгледаме редицата $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots \leq p_n \leq \dots$ Избираме произволно $\varepsilon > 0$. $p_{n+1} - p_n \leq q_n - p_n = \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}}$ Да изразим разликата

$$0 \leq p_{n+k} - p_n = (p_{n+k} - p_{n+k-1}) + (p_{n+k-1} - p_{n+k-2}) + \dots + (p_{n+1} - p_n) \leq$$

$$\leq \frac{q_1 - p_1}{2^{n+k-2}} + \frac{q_1 - p_1}{2^{n+k-3}} + \dots + \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}} = \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}\right)}_{\text{разместим сме числовите}}$$

$$= \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{q_1 - p_1}{2^{n-2}} < \varepsilon$$ за достатъчно голямо n.

Следователно редицата p_n удовлетворява условието на Коши, т.е тя е фундаментална, с която теоремата е доказана напълно. И така, като използвахме теорията на рационалните числа, ние можахме да дадем пример на едно непрекъснато наредено тяло. Занапред, над реалните числа бихме могли да разбираме Канторовите класове.

Особени точки на алгебричните криви

Нека $F(x,y)$ е полином от n-та степен на двете променливи x и y $\left(F(x,y) = \sum_{\alpha+\beta \leq n} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta\right)$

Казваме, че (x_0, y_0) е една особена точка върху алгебричната крива (1) $F(x,y) = 0$, когато са изпълнени следните условия:
(2) $F(x_0, y_0) = 0$; $F'_x(x_0, y_0) = 0$ и $F'_y(x_0, y_0) = 0$

Теорема: Ако са изпълнени условията (2) и ако $F''^2_{xy}(x_0, y_0) - F''_{xx}(x_0, y_0) F''_{yy}(x_0, y_0) > 0$, $F''_{yy} \neq 0$

що във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има две и само две диференцуеми функции на x, които, поставени на мястото на y, удовлетворяват уравнението (1) и приемат стойност y_0 при $x = x_0$

Доказателство:

Развиваме $F(x,y)$ около точката (x_0,y_0) по формулите на Тейлор:

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[(x-x_0)F'_x(x_0,y_0) + (y-y_0)F'_y(x_0,y_0)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2 F''_{xx}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)F''_{xy}(x_0,y_0) + (y-y_0)^2 F''_{yy}(x_0,y_0)\right] +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n F(x_0,y_0)$$

($R_n = 0$, понеже $F(x,y)$ е полином от степен най-много $\underline{\underline{n}}$)

$F(x,y)$ добива вида:

$$F(x,y) = A_{20}(x-x_0)^2 + A_{11}(x-x_0)(y-y_0) + A_{02}(y-y_0)^2 +$$
$$+ A_{30}(x-x_0)^3 + \ldots + A_{n0}(x-x_0)^n + A_{n-1,1}(x-x_0)^{n-1}(y-y_0) + \ldots + A_{0n}(y-y_0)^n$$

В тоя полином ще направим следното преобразование:

Означаваме: $\dfrac{y-y_0}{x-x_0} = u$ $\qquad y = y_0 + u(x-x_0)$

Получаваме: $G(x,u) = F(x, y_0 + u(x-x_0))$

$$G(x,u) = (x-x_0)^2\left\{\left[A_{20} + A_{11}u + A_{02}u^2\right] + (x-x_0)P(x,u)\right\}$$

Окончателно $G(x,u) = (x-x_0)^2 H(x,u)$, където

$$H(x,u) = A_{20} + A_{11}u + A_{02}u^2 + (x-x_0)P(x,u)$$

$$A_{20} = \frac{F''_{xx}(x_0,y_0)}{2!} \qquad A_{11} = \frac{F''_{xy}(x_0,y_0)}{2!} \qquad A_{02} = \frac{F''_{yy}(x_0,y_0)}{2!}$$

$\Delta = A_{11}^2 - 4A_{20}A_{02} > 0$ $\qquad A_{02} \neq 0$ (по предположение)

Какви затруднения имаме да преодолеем?

Имаме да изучим кривата $F(x,y) = 0$. ТСНФ ние не

можем да приложим нито относно y (защото $F'_y(x_0,y_0)=0$), нито относно x (защото $F'_x(x_0,y_0)=0$). Не ще приложим ТСНФ относно уравнението $H(x,u)=0$ (тук условията на тая теорема са изпълнени)

Ще докажем, че около т. x_0 съществува околност, такава че в нея имаме две и само две диференцуеми функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяващи уравнението $F(x,f(x))=0$ и $F(x,g(x))=0$ и освен това $f(x_0)=y_0$ и $g(x_0)=y_0$, т. е. ще докажем, че през точката (x_0,y_0) минават два и само два диференцуеми клона. Възниква въпроса относно коя точка ще приложим ТСНФ и дали за тая точка са налице условията, при които доказахме тая теорема.

Абсцисата е x_0. Имаме $H(x_0,u)=0$ (искаме това уравнение да бъде изпълнено)

$H(x_0,u) = A_{20} + A_{11}u + A_{02}u^2 = 0$ — квадратно уравнение относно u. Това уравнение има две решения и те са различни помежду си ($\Delta > 0$ — реални и различни корени)

Нека тия решения са α и β. Да вземем от тия два корена един произволен, например α. Имаме $H(x_0,\alpha)=0$

Точката (x_0,α) удовлетворява уравнението $H(x,u)=0$

Но $H(x,u)$ е полином на $\underline{x}$ и $\underline{\underline{u}}$. Следователно съществува околност на точката (x_0,α), където функцията $H(x,u)$ е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни поне от първи ред (такива е например цялата равнина)

Интересува ни дали е изпълнено условието $H'_u(x_0,\alpha) \neq 0$?

$$H'_u(x,u) = A_{11} + 2A_{02}u + (x-x_0)P'_u(x,u)$$

$$H'_u(x_0,\alpha) = A_{11} + 2A_{02}\alpha \overset{?}{=} 0$$

Но тоя квадратен тричлен $A_{20} + A_{11}u + A_{02}u^2$ има само прости корени $\Rightarrow$ α не е корен на неговата производна, т. е.

$$H'_u(x_0,\alpha) \neq 0$$

Този резултат ни позволява да приложим към уравнението $H(x,u)=0$ ТСНФ и въз основа на тая теорема да твърдим, че в достатъчно малка околност на точката x_0 съществува функция $u=\varphi(x)$, която удовлетворява уравнението $H(x,\varphi(x))=0$ и такава че $\varphi(x_0)=\alpha$.
Тъй като $H(x,u)$ е полином на x,u $\Rightarrow$ H притежава непрекъснати частни производни спрямо всяка от променливите $\Rightarrow$ можем околността да изберем толкова малка, че $\varphi(x)=u$ да бъде диференцируема в тая околност.
Следователно $H(x,\varphi(x))=0$. Търсим функция y, такава че $F(x,y)=0$. Функцията $f(x)=y_0+\varphi(x)(x-x_0)$ е дефинирана в същата околност, където и $\varphi(x)$. Ще покажем, че $f(x)$ удовлетворява уравнението (1). Заместваме в уравнението и получаваме:

$$F(x,f(x))=F(x,y_0+\varphi(x)(x-x_0))=G(x,\varphi(x))=(x-x_0)^2H(x,\varphi)$$

Но $H(x,\varphi)=0$ (защото $\varphi(x)$ удовлетворява това y-ние)
Следователно $F(x,f(x))=0$. Но функцията $f(x)$ е диференцируема и има непрекъсната производна, защото $\varphi(x)$ има непрекъсната производна. Освен това

$$f(x_0)=y_0+\varphi(x_0)\cdot 0=y_0$$

С помощта на корени β конструираме още една функция $g(x)$. Ще докажем, че $f(x)$ и $g(x)$ са различни функции. Понеже f е диференцируема, имаме:

$$f'(x)=\varphi'(x)(x-x_0)+\varphi(x) \qquad f'(x_0)=\varphi(x_0)=\alpha$$

Аналогично $g'(x_0)=\beta$. Понеже производните на тия две функции са различни в точката x_0, то и самите функции са различни. Ще докажем, че новата такива функции няма. Нека $h(x)$ е диференцируема функция, дефинирана в достатъчно малка околност на точката x_0, нека $h(x_0)=y_0$ и тая функция е

такава, че $F(x,h(x))=0$. Ще покажем, че $h(x)$ съвпада с $g(x)$ или с $f(x)$. За да докажем това, образуваме спомагателната функция

$$\Theta(x)=\begin{cases}\dfrac{h(x)-y_0}{x-x_0} & \text{при } x\neq x_0\\[2ex] h'(x_0) & \text{при } x=x_0\end{cases}$$

тая производна съществува, понеже по предположение h е диференцируема. Производната е граница на горното диференчно частно при $x\to x_0$ и $x\neq x_0$.
$\Theta(x)$ е непрекъсната навсякъде (че $\Theta(x)$ е непрекъсната при $x\neq x_0$ – това е очевидно. При $x=x_0$ $\Theta(x)$ пак е непрекъсната, защото диференчното частно $\dfrac{h(x)-y_0}{x-x_0}\to h'(x_0)$ при $x\to x_0$.) $\quad \Theta=\dfrac{h(x)-y_0}{x-x_0} \qquad h(x)=y_0+\Theta(x)(x-x_0)$

Това равенство е верно при $x\neq x_0$, но то е вярно и при $x=x_0$, защото точно $h(x_0)=y_0$ (вж. определението за $h(x)$)
Следователно това равенство е общовалидно.
Но h удовлетворява уравнението $F(x,h)=0$

$$0=F(x,h)=F(x,y_0+\Theta(x)(x-x_0))=G(x,\Theta(x))=(x-x_0)H(x,\Theta(x))$$

Ако $x\neq x_0 \Rightarrow H(x,\Theta(x))=0$
Нека $x\to x_0$, $x\neq x_0$ $\quad \Theta(x)$ – непрекъсната

В последното равенство извършваме тоя граничен преход и получаваме $H(x_0,\Theta(x_0))=0$
Следователно $H(x,\Theta(x))=0$ навсякъде в разглежданата интервал

$$\left.\begin{aligned}A_{20}+A_{11}\Theta(x_0)+A_{02}\Theta^2(x_0)&=0\\ A_{20}+A_{11}\Theta(x)+A_{02}\Theta^2(x)&=0\end{aligned}\right\}$$

условията, изразяващи че $H(x,\Theta(x))=0$

Следователно $(x-x_0)P(x,u)=0$ Сл. $\Theta(x_0)=\alpha$ или $\Theta(x_0)=\beta$

Съгласно ТЕНф, можем да твърдим, че $\theta(x) \equiv \varphi(x)$ и оттук $h(x) \equiv f(x)$. Ако $\theta(x_0) = B \Rightarrow h(x) \equiv g(x)$
С това теоремата е доказана.

На чертежа през (x_0,y_0) минават два клона. Да разгледаме третия клон (надебелен). Не противоречи ли това на теоремата, която доказахме? – не, тъй като третата функция не е диференцируема в т. (x_0,y_0)

Теорема 2: Ако са изпълнени условията (2) и ако $\Delta = F''^2_{xy}(x_0,y_0) - F''_{xx}(x_0,y_0)F''_{yy}(x_0,y_0) < 0$, то (x_0,y_0) е единична изолирана точка на кривата $F(x,y)=0$. Това значи, че около точката (x_0,y_0) можем да се построи околност, която не съдържа друга точка от кривата, освен (x_0,y_0)

Доказателство:

Разглеждаме $F(x,y)$ $\quad F'_y(x_0,y_0)=0 \quad F'_x(x_0,y_0)=0$
Следователно в точката (x_0,y_0) тая функция има строг локален екстремум (строг максимум, или строг минимум). Следователно около точката (x_0,y_0) съществува околност, такава че във всички точки, различни от точката (x_0,y_0) от тая околност имаме $F(x,y) < F(x_0,y_0)=0$ или $F(x,y) > F(x_0,y_0)=0$
Следователно в тая околност няма други точки, освен (x_0,y_0), които да принадлежат на кривата, т. е. точката (x_0,y_0) е изолирана за нашата крива.
С това теоремата е доказана.
Заслужава да отбележим, че случаят $\Delta = F''^2_{xy}(x_0,y_0) - F''_{xx}(x_0,y_0)F''_{yy}(x_0,y_0) > 0$ не е изключен напълно. Ние предполагахме, че $F''_{yy}(x_0,y_0) \neq 0$
Разбира се, ако $F''_{xx}(x_0,y_0) \neq 0$ можем да направим

аналогични разсъждения и да стигнем до същите резултати. Ако $F''_{xx}(x_0,y_0)=0$ и $F''_{yy}(x_0,y_0)=0$, тоя случай не е съществено различен от предходния, тъй като координатната система можем да завъртим така, че в новата координатна система едно от горните две условия да бъде налице.
Когато в точката (x_0,y_0) имаме два диференцируеми клона, такава точка се нарича двойна.
Ако $\Delta = 0$, могат да се представят най-различни случаи. Една изчерпателна класификация в тоя случай все още не е направена.
Накрая ще отбележим, че само за простота се ограничихме със случая за алгебрични криви.
Методът, с който се послужихме, може да се използува при много по-общи предположения. Когато имаме многообразие с повече уравнения работата е по-сложна, но средствата са тези.

Допирателно многообразие към дадено многообразие.

Нека е дадено многообразие, дефинирано с равенствата

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2 \dots x_{n+k}) = 0 \end{cases}$$

Нека $a = (a_1, a_2, \dots a_{n+k})$ е обикновена точка, лежаща върху графиката на нашето многообразие.
Развиваме функциите $F_1, F_2, \dots F_n$ формално около точката a в Тейлоров ред.

$$0 = F_1(x) = \underset{\substack{\| \\ 0}}{F_1(a)} + \frac{\partial F_1(a)}{\partial x_1}(x_1-a_1) + \frac{\partial F_1(a)}{\partial x_2}(x_2-a_2) + \dots + \frac{\partial F_1(a)}{x_{n+k}}(x_{n+k}-a_{n+k})$$

(можем т.а лежи в/у многообразието)

$+ \dots$ (0(такамтте членове пренебрегваме)

$$0 = F_2(x) = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{F_2(a)} + \frac{\partial F_2(a)}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial F_2(a)}{\partial x_{n+k}}(x_{n+k} - a_{n+k}) + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$0 = F_n(x) = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{F_n(a)} + \frac{\partial F_n(a)}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial F_n(a)}{\partial x_{n+k}}(x_{n+k} - a_{n+k}) + \dots$$

Да разгледаме n-те уравнения

$$\left|\begin{array}{l} \frac{\partial F_1(a)}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial F_1(a)}{\partial x_{n+k}}(x_{n+k} - a_{n+k}) = 0 \\ \frac{\partial F_2(a)}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial F_2(a)}{\partial x_{n+k}}(x_{n+k} - a_{n+k}) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_n(a)}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial F_n(a)}{\partial x_{n+k}}(x_{n+k} - a_{n+k}) = 0 \end{array}\right.$$

Тия n уравнения определят едно многообразие. Това многообразие е едно линейно многообразие. Именно това многообразие наричаме допирателно многообразие в точката a към дадено многообразие. Допирателното многообразие не се изражда, защото измежду всички функционални детерминанти $\frac{D(F_1, F_2 \dots F_n)}{D(x_{k1}, x_{k2} \dots x_{kn})}$ има поне един, който е различен от 0 в точката a (a е неособена точка за многообразието)

Да разгледаме сферичното многообразие $F(x,y) = 0$ – крива. Нека (x_0, y_0) е обикновена точка, лежаща върху това многообразие. Какво се изражда допирателното многообразие в тоя случай?

$F(x_0, y_0) = 0$ То се изражда в многообразието

$$F'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0,y_0)(y - y_0) = 0$$

Понеже (x_0, y_0) е обикновена точка за нашата крива,

поне един от коефициентите $F'_x(x_0,y_0)$ и $F'_y(x_0,y_0)$ е различен от 0. Следователно допирателното многообразие в тоя случай се изражда в една истинска права.

Тая права е инцидентна с точката (x_0, y_0)

Тая права се нарича допирателна към кривата $F(x,y)$ в точката (x_0, y_0).

По такъв начин виждаме, че понятието допирателно многообразие към дадено многообразие е едно обобщение на понятието допирателна към крива.

Заслужава да отбележим, че ние различаваме понятията крива и дъга.

Крива е многообразие, дефинирано с уравнение $F(x,y) = 0$

Дъга е двойка функции на едни и същи променливи

$$(1)\left|\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \\ \alpha \le t \le \beta \end{array}\right\} \text{ това е различно между крива и дъга.}$$

Аналогично на изложеното по-горе се дефинира понятието допирателна към една дъга.

Нека $f(t)$ и $g(t)$ притежават производни в точката t_0

Развиваме формално f и g по формулата на Тейлор около точката t_0

$$\left|\begin{array}{l} x = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \dots \\ y = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) + \dots \end{array}\right. \quad \text{(останалите членове пренебрегваме)}$$

Нека поне един от коефициентите $f'(t_0)$ и $g'(t_0)$ е различен от 0, т.е. $f'(t_0) + g'(t_0) \neq 0$

Да положим $t - t_0 = u$ и да разгледаме равенствата

$$\left|\begin{array}{l} x = f(t_0) + f'(t_0)u \\ y = g(t_0) + g'(t_0)u \end{array}\right\} \text{ имаме едно параметрично представяне на една истинска права}$$

Тая права наричаме допирателна към нашата дъга, която съответствува на значение t_0 на параметъра t.

Лесно се вижда, че тая права е инцидентна с $(f(t_0), g(t_0))$.

Обвивки на фамилия от криви

Нека е дадено уравнение $F(x,y,\alpha)=0$. Фиксираме α. Получаваме крива. Ако дадем на α друга стойност – получаваме друга крива. Когато α се мени, получаваме еднопараметрична фамилия от криви.

Казваме, че една дъга Γ с уравнения $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ $t\in\Delta$ е обвивка на тая фамилия от криви, ако каквато и крива да вземем от фамилията L, тя се допира до нашата дъга. Ако вземем една точка от дъгата Γ, има крива, която се допира до дъгата в тая точка.

За да разберем тази дефиниция, трябва да знаем какво значи кривата и дъгата да се допират.

Нека са дадени крива и дъга.

Нека (x_0,y_0) е точка върху дъгата, отговаряща за стойност на параметъра $t=t_0$.

Казваме, че кривата и дъгата се допират в точката (x_0,y_0), ако $F(x_0,y_0,\alpha)=0$, $x_0=f(t_0)$, $y_0=g(t_0)$ и освен това в тая точка кривата и дъгата имат една и съща допирателна.

Формално правило за търсене на обвивки

$F(x,y,\alpha)=0$ Диференцираме това равенство спрямо α. Получаваме $F'_\alpha(x,y,\alpha)=0$. От системата

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha)=0 \\ F'_\alpha(x,y,\alpha)=0 \end{cases}$$ определяме $$\left.\begin{cases} x=f(\alpha) \\ y=g(\alpha) \end{cases}\right\} \text{дъга}$$

Тая дъга е нашата обвивка.

Както може и да се очаква, така както сме го формулирали, нашето правило е погрешно. В какво се състои работата?

Нека разгледаме ур-ето $F(x,y,\alpha)=0$. Нека си мислим, че при всяка стойност на α кривата, която се получава има 1 особена точка. Ако менем α, особените точки също се менят. Нека си поставим задача да намерим ГМ на особените точки за тия криви.

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha)=0 \\ F'_x(x,y,\alpha)=0 \\ F'_y(x,y,\alpha)=0 \end{cases}$$

От последните две уравнения определяме $\begin{cases} x=f(\alpha) \\ y=g(\alpha) \end{cases}$ и заместваме в първото. Получаваме $F(f(\alpha),g(\alpha))=0$ за всяко α.

Диференцираме последното равенство спрямо α

$$F'_x f' + F'_y g' + F'_\alpha = 0$$

Като вземем в предвид, че $F'_x=0$ и $F'_y=0$, получаваме, че $F'_\alpha=0$. За ГМ на особените точки получаваме системата

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha)=0 \\ F'_\alpha(x,y,\alpha)=0 \end{cases}$$

Следователно ние не знаем по тая метода да ни търсим особени точки или обвивки и не знаем какво ще намерим. В общия случай нищо няма да намерим.

Ние ще изберем едни системи от достатъчни условия, при които ще можем да твърдим, че нашето формално правило е вярно.

Теорема: 1) Нека $F(x,y,\alpha)$ е дефинирана в околност на точката (x_0,y_0,α_0) и притежава непрекъснати частни производни поне до втори ред в тая околност.

2) Нека $$\begin{cases} F(x_0,y_0,\alpha_0)=0 \\ F'_\alpha(x_0,y_0,\alpha_0)=0 \end{cases}$$

3) Нека $$\begin{vmatrix} F'_x(x_0,y_0,\alpha_0) & F'_y(x_0,y_0,\alpha_0) \\ F''_{\alpha x}(x_0,y_0,\alpha_0) & F''_{\alpha y}(x_0,y_0,\alpha_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

4) $F''_{\alpha\alpha}(x_0,y_0,\alpha_0)\neq 0$

При тия предположения около т. α_0 съществува околност Δ, такава че ако α се лежи в тая околност, получената фигура от крива или обвивка, която може да се представи в параметричен вид (6) $\begin{cases} x = f(\alpha) \\ y = g(\alpha) \end{cases}$, където функциите $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ се определят от системата $\left.\begin{cases} F(x,y,\alpha) = 0 \\ F'_\alpha(x,y,\alpha) = 0 \end{cases}\right\}$ (7)

Функциите $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ са диференцуеми и производните им не се анулират едновременно. Освен това $f(\alpha_0) = x_0$; $g(\alpha_0) = y_0$.

Доказателство:

Като вземем в пред вид условията (2), (3) и [illegible], заключаваме с помощта на ТСНФ, че във всяка достатъчно малка околност на точката α_0 има един и само един чрез непрекъснати функции $\begin{cases} x = f(\alpha) \\ y = g(\alpha) \end{cases}$

които удовлетворяват системата (7) и за които $\begin{cases} x_0 = f(\alpha_0) \\ y_0 = g(\alpha_0) \end{cases}$

Като вземем пред вид още веднъж условието (4) и обстоятелството, че функциите $F(x,y,\alpha)$ и $F'_\alpha(x,y,\alpha)$ притежават непрекъснати частни производни, заключаваме, че функциите $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ са диференцуеми.

Не е трудно да се покаже, че $f'(\alpha)$ и $g'(\alpha)$ не се анулират едновременно, когато α се лежи в някоя достатъчно малка околност на точката α_0.

И наистина, имаме (8) $F'_\alpha[f(\alpha), g(\alpha), \alpha] = 0$. Диференцираме спрямо α това равенство. Това ни дава

(9) $F''_{\alpha x}[f(\alpha), g(\alpha), \alpha] \cdot f'(\alpha) + F''_{\alpha y}[f(\alpha), g(\alpha), \alpha]\, g'(\alpha) + F''_{\alpha\alpha}[f(\alpha), g(\alpha), \alpha] = 0$

Нека допуснем, че във всяка околност на точката α_0 съществува α от околността, за което $f'(\alpha) = g'(\alpha) = 0$

Нека $\alpha_n \to \alpha_0$ чрез редица от стойности, за които $f'(\alpha_n) = g'(\alpha_n) = 0$. Тогава от (9) получаваме при $\alpha = \alpha_n$ че $F''_{\alpha\alpha}(f(\alpha_n), g(\alpha_n), \alpha_n) = 0$. Но $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ и $F''_{\alpha\alpha}(\alpha)$ – непрекъснати. Следователно $F''_{\alpha\alpha}(f(\alpha), g(\alpha), \alpha)$ – непрекъсната. След извършване на граничен преход в равенството $F''_{\alpha\alpha}(f(\alpha_n), g(\alpha_n), \alpha_n)$, получаваме $F''_{\alpha\alpha}(x_0, y_0, \alpha_0) = 0$ – противоречие с условието.

Ние ще покажем, че дъгата $\left.\begin{cases} x = f(\alpha) \\ y = g(\alpha) \end{cases}\right\}$ (10) и

кривата $F(x,y,\alpha_1) = 0$ където α_1 е когато е константа достатъчно близка до α_0, се допират в точката $[f(\alpha_1), g(\alpha_1)]$. Наистина, като вземем в предвид, че $f'(\alpha_1)$ и $g'(\alpha_1)$ не са едновременно нули, заключаваме че допирателната към дъгата (10) може да се представи във вида:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= f(\alpha_1) + u f'(\alpha_1) \\ \eta &= g(\alpha_1) + u g'(\alpha_1) \end{aligned}\right\} \quad (11),$$ където u е параметър.

От друга страна уравнението на допирателната към кривата $F(x,y,\alpha_1) = 0$ може да се представи във вида:

(12) $[\xi - f(\alpha_1)]F'_x + [\eta - g(\alpha_1)]F'_y = 0$ (тук двете частни производни F'_x и F'_y не могат да се анулират едновременно, когато α_1 е достатъчно близко до α_0, защото в противен случай би било нарушено условието (4)

За да се убедим, че точките (11) и (12) се сливат, достатъчно е да покажем, че всяка точка на правата (11) лежи върху правата (12). За целта заместваме в уравнението (12) текущите координати с $[f(\alpha_1) + u f''(\alpha_1),\ g(\alpha_1) + u g'(\alpha_1)]$. Това ни дава $u[f'(\alpha_1)F'_x + g'(\alpha_1)F'_y] = 0$. За да се убедим, че полученото равенство е удовлетворено, прилагаме правилото за диференциране на сложна функция

към тъждеството $F[f(\alpha), g(\alpha), \alpha] = 0$. Това ни дава $f'(\alpha)F'_x + g'(\alpha)F'_y + F'_\alpha = 0$. Като вземем в предвид горе зависимостите $F'_\alpha[f(\alpha), g(\alpha), \alpha] = 0$ получаваме $f'(\alpha)F'_x + g'(\alpha)F'_y = 0$. Следователно при всяка неизвестна константа α_1 (достатъчно близка до α_0) кривата $F(x,y,\alpha)$ се допира до начални два обратно. За вземем една крива от фамилията. Ще докажем, че тя се допира до начални два. $\alpha = \alpha_1$ $F(x,y,\alpha_1) = 0$ — по начални системите са направени по-горе. Следователно тя допира и двете начални фамилии криви.

Край на V тетрадка

Съдържание на V тетрадка